

А. В. ПОГОРЕЛОВ

МНОГОМЕРНАЯ ПРОБЛЕМА МИНКОВСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1975

517.5
П 43
УДК 513.0

Монография посвящена регулярному решению известной проблемы Минковского о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной гауссовой кривизной, а также ряду вопросов геометрии и теории дифференциальных уравнений с частными производными, примыкающих к этой проблеме. В частности, здесь рассматривается общая проблема существования замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной функцией кривизны любого порядка. Изучаются обобщенные решения многомерного аналога уравнения Монжа — Ампера, при известных условиях доказывается их регулярность, решается задача Дирихле. Рассматриваются несобственные выпуклые аффинные гиперсферы и в случае их полноты доказывается, что все они являются эллиптическими параболоидами. Книга может быть рекомендована студентам, аспирантам и научным работникам в области геометрии и теории дифференциальных уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
§ 1. Выпуклые тела и гиперповерхности в E^n	9
1. Основные понятия для выпуклых тел и гиперповерхностей (9). 2. Регулярные выпуклые гиперповерхности (11). 3. Площадь и кривизна выпуклой гиперповерхности (15). 4. Смещение выпуклых тел (19).	
§ 2. Обобщенное решение проблемы Минковского	21
1. Постановка проблемы. Единственность решения (21). 2. Существование выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней (24). 3. Существование выпуклой гиперповерхности с данной гауссовой кривизной (28).	
§ 3. Регулярное решение проблемы Минковского	31
1. Априорные оценки радиусов нормальной кривизны выпуклой гиперповерхности (31). 2. Некоторые вспомогательные формулы (35). 3. Априорная оценка третьих производных опорной функции выпуклой гиперповерхности (39). 4. Доказательство теоремы 1 (42).	
§ 4. Обобщение проблемы Минковского	46
1. Оценка главных радиусов кривизны выпуклой гиперповерхности (47). 2. Оценка производных опорной функции выпуклой гиперповерхности (50). 3. Существование выпуклой гиперповерхности с данной функцией кривизны (53). 4. Общая оценка для радиусов нормальной кривизны (56).	
§ 5. Многомерный аналог уравнения Монжа—Ампера	60
1. Существование выпуклого многогранника с данными площадями нормального изображения в вершинах (60).	

2. Понятие обобщенного решения. Задача Дирихле (63).	
3. Априорные оценки для регулярных решений (66).	
4. Регулярность обобщенных решений (70).	
5. Пример обобщенного решения, не являющегося регулярным (73).	
6. Регулярное решение задачи Дирихле (77).	
§ 6. О несобственных выпуклых аффинных гиперсферах . .	81
1. О расположении центра тяжести выпуклого тела (81).	
2. Специальные сечения аффинных гиперсфер (83).	
3. Некоторые соотношения размеров для аффинной гиперсферы (85).	
4. Априорные оценки для аффинных гиперсфер (88).	
5. Доказательство основной теоремы для несобственных выпуклых аффинных гиперсфер (90).	
Литература	94

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие геометрические проблемы при аналитическом подходе к их решению приводят к рассмотрению дифференциальных уравнений с частными производными. Так, например, известные классические проблемы геометрии «в целом» — проблема Вейля и Минковского связаны с проблемой разрешимости уравнения Монжа — Ампера, рассматриваемого на многообразии, гомеоморфном сфере. Значительные успехи, достигнутые за последние четверть века в теории дифференциальных уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа, связаны прежде всего с решением упомянутых двух геометрических проблем. Именно на этом пути были получены весьма общие теоремы о существовании и единственности решений уравнений Монжа — Ампера общего вида. Геометрическая трактовка аналитической задачи подключила к ее решению сильные геометрические средства. Одним из таких средств было понятие обобщенного решения. Это понятие первоначально относилось к специальным уравнениям проблем Вейля и Минковского, а затем перенесено на общий случай.

Естественным обобщением простейшего уравнения Монжа — Ампера на многомерный случай является уравнение

$$\det \|\partial^2 z / \partial x_i \partial x_j\| = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Значительная часть предлагаемой монографии посвящена изучению этого уравнения. В частности, здесь опреде-

ляется понятие обобщенного решения, доказывається разрешимость задачи Дирихле в любой строго выпуклой области при непрерывных граничных значениях, доказывається регулярность строго выпуклого обобщенного решения в случае достаточной регулярности правой части уравнения (ф) и др. Решение всех этих вопросов тесно связано с многомерной проблемой Минковского, которая при аналитическом истолковании приводит к рассмотрению этого уравнения. Регулярное решение многомерной проблемы Минковского является одним из основных результатов настоящей работы. Это и определило ее название.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена известной проблеме Минковского, а также ряду вопросов геометрии и теории дифференциальных уравнений, которые в геометрическом или аналитическом плане связаны с этой проблемой. Проблема Минковского состоит в решении вопроса о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности, у которой гауссова кривизна является заданной функцией единичного вектора внешней нормали. Минковскому принадлежит обобщенное решение этой проблемы [1]. Он доказал, что если заданная на единичной гиперсфере Ω непрерывная положительная функция $K(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \xi \frac{d\omega}{K(\xi)} = 0,$$

то существует замкнутая выпуклая гиперповерхность F , для которой $K(\xi)$ является гауссовой кривизной в точке с внешней нормалью ξ . Это решение мы называем *обобщенным*, так как оно не содержит никакой информации о характере регулярности гиперповерхности F даже, если функция $K(\xi)$ — аналитическая. Что касается гауссовой кривизны, то она определяется по Гауссу, как предел отношения площади сферического изображения к площади гиперповерхности и поэтому не предполагает регулярности последней. Если заданная функция $K(\xi)$ является регулярной, то естественно ставить вопрос о существовании регулярной гиперповерхности с гауссовой кривизной $K(\xi)$. Проблема Минковского в такой постановке для случая двумерных поверхностей в трехмерном пространстве была предметом исследования многих известных

математиков: Г. Леви [4], К. Миранда [5], Л. Ниренберг [6] и др.

В цикле работ автора [13]—[19], опубликованных в Докладах Академии наук СССР, было дано регулярное решение общей (многомерной) проблемы Минковского, а также рассмотрены некоторые другие вопросы геометрии и теории дифференциальных уравнений, примыкающие к этой проблеме. Настоящая работа содержит полное изложение результатов, анонсированных в упомянутых заметках.

Для удобства читателя мы начинаем с определений основных понятий и формулировки некоторых результатов для выпуклых тел и выпуклых гиперповерхностей в E^n (§ 1). Во втором параграфе мы воспроизводим классический результат Минковского. Третий параграф содержит регулярное решение проблемы Минковского. Здесь доказано, что если функция $K(\xi)$ положительна и достаточно регулярна, то решение проблемы Минковского регулярно. В частности, если $K(\xi)$ — аналитическая функция, то решение — аналитическое. Основным средством доказательства является получение априорных оценок для главных радиусов кривизны гиперповерхности. В § 4 такие оценки получаются для гиперповерхности, у которой задана произвольная, подчиненная весьма общим условиям функция главных радиусов кривизны. Естественное обобщение проблемы Минковского состоит в решении вопроса о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной функцией кривизны любого порядка. Эта проблема рассматривается в § 4.

Регулярное решение проблемы Минковского тесно связано с изучением уравнения вида

$$\det \|z_{ij}\| = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Для этого уравнения в § 5 вводится понятие обобщенного решения, рассматривается задача Дирихле, доказывается регулярность строго выпуклого обобщенного решения, если правая часть φ уравнения достаточно регулярна. Последний, шестой параграф работы посвящен несобственным аффинным гиперсферам. Это полные бесконечные выпуклые гиперповерхности $z = z(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющие уравнению

$$\det \| \zeta_{ij} \| = \text{const} > 0.$$

Доказывается, что все несобственные выпуклые аффинные гиперсферы являются эллиптическими параболоидами. Этот результат для $n = 2$ был получен К. Ёргенсом [9], а для $n = 3, 4$ — Е. Калаби [10]. Здесь он устанавливается для любого n .

§ 1. ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА И ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В E^n

В этом параграфе мы напомним основные понятия и некоторые результаты для выпуклых тел и гиперповерхностей в n -мерном евклидовом пространстве, которые используются в дальнейшем изложении. Подробное изложение этих результатов с доказательствами можно найти в книге Боннезена и Фенхеля [2] и в работах А. Д. Александрова [3].

1. Основные понятия для выпуклых тел и гиперповерхностей. Множество M в евклидовом пространстве E^n называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя его точками X и Y оно содержит соединяющий их отрезок. Пересечение двух или большего числа выпуклых множеств также является выпуклым множеством. Для любого множества H пересечение всех, содержащих его выпуклых множеств называется *выпуклой оболочкой*. Она совпадает с пересечением всех полупространств, содержащих H . Если H — выпуклое множество, то оно совпадает со своей выпуклой оболочкой.

Выпуклое множество V_a называется *конусом* с вершиной a , если оно состоит из лучей, исходящих из точки a . Эта точка называется *вершиной конуса*. Пусть T — выпуклое множество и a — фиксированная точка пространства. Тогда лучи, исходящие из точки a , пересекающие тело T , образуют выпуклый конус с вершиной a .

Выпуклое множество, содержащее внутренние точки, называется *выпуклым телом*, а его граница — *выпуклой гиперповерхностью*. Выпуклая гиперповерхность, ограничивающая конечное выпуклое тело, является многообразием, гомеоморфным сфере. Гомеоморфизм устанавливается проектированием из любой внутренней точки на сферу с центром в этой точке. В дальнейшем мы будем иметь дело, как правило, с конечными выпуклыми телами и соответственно с замкнутыми гиперповерхностями.

Простейшим нетривиальным выпуклым телом является выпуклый многогранник — пересечение конечного числа

полупространств. Граница выпуклого многогранника также называется *многогранником*. Она составлена из выпуклых многогранников меньшего числа измерений. Выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного числа точек, не лежащих в одной гиперплоскости.

Для выпуклых тел и ограничивающих их гиперповерхностей вводится понятие *сходимости*. Именно, последовательность выпуклых тел T_n сходится к телу T , если для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n тело T_n содержится в ε -окрестности тела T , а тело T — в ε -окрестности тела T_n . Понятию сходимости для выпуклых тел можно дать и другие эквивалентные определения. В частности, пусть τ — произвольный луч, исходящий из внутренней точки O тела T , пересекающий границу тела T в точке x , а границу тела T_n — в точке x_n . Тогда последовательность тел T_n сходится к телу T , если $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ для любого луча τ . Если ограниченная последовательность выпуклых тел T_n содержит некоторый шар, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому выпуклому телу T .

Важнейшим понятием для выпуклых тел и гиперповерхностей является понятие опорной гиперплоскости. Пусть x — произвольная точка выпуклой гиперповерхности F , ограничивающей тело T . Гиперплоскость α , проходящая через точку x , называется *опорной* для тела T (гиперповерхности F), если все точки тела располагаются по одну сторону гиперплоскости α . Через каждую точку выпуклой гиперповерхности проходит по крайней мере одна опорная гиперплоскость. Если через точку x проходит только одна опорная гиперплоскость, то эта точка называется *гладкой точкой гиперповерхности*. Если все точки гиперповерхности — гладкие, то гиперповерхность называется *гладкой*. Гиперповерхность называется *строго выпуклой*, если любая ее опорная гиперплоскость имеет с ней только одну общую точку.

Отметим некоторые свойства опорных гиперплоскостей. Пусть F — выпуклая гиперповерхность, x_n — последовательность точек гиперповерхности, сходящаяся к точке x_0 , и α_n — опорная гиперплоскость F в точке x_n . Тогда, если последовательность гиперплоскостей α_n сходится, то предельная гиперплоскость α_0 будет опорной для гиперповерхности F в точке x_0 . Пусть F_n — последовательность выпуклых гиперповерхностей, сходящаяся к гиперпо-

верхности F , x_n — точка на F_n и α_n — опорная гиперплоскость в точке x_n к F_n . Тогда, если последовательность точек x_n сходится к точке x_0 гиперповерхности F , а последовательность гиперплоскостей α_n сходится к гиперплоскости α_0 , то эта гиперплоскость будет опорной для F в точке x_0 .

Важным понятием для выпуклых тел и выпуклых гиперповерхностей является понятие опорной функции. Пусть T — выпуклое тело и F — ограничивающая его гиперповерхность в E^n . Введем прямоугольные декартовы координаты $x_1, \dots, x_n$ с началом координат внутри тела T . *Опорной функцией* тела T (гиперповерхности F) называется функция $H(x)$, определенная во всем пространстве равенством

$$H(x) = \sup_{y \in T} (xy),$$

где $\sup$ берется по всем точкам y тела T . Функция $H(x)$ — положительно однородная первой степени и выпуклая. Это значит, что при $\lambda \geq 0$

$$H(\lambda x) = \lambda H(x),$$

при $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$

$$H(\lambda x + \mu y) \leq \lambda H(x) + \mu H(y).$$

Обратно, положительно однородная первой степени выпуклая функция $H(x)$ является опорной функцией некоторого выпуклого тела (может быть, вырождающегося). Это тело представляет собой пересечение полупространств E_y , определяемых неравенствами

$$(xy) \leq H(y).$$

Если выпуклое тело переносится параллельно на вектор a , то его опорная функция получает линейное слагаемое ax . Опорная функция выпуклого тела имеет простое значение: для единичного вектора x опорная функция $H(x)$ — это расстояние от начала координат до опорной гиперплоскости с внешней нормалью x ; в общем случае это расстояние еще умножается на $|x|$.

2. Регулярные выпуклые гиперповерхности. Выпуклая гиперповерхность в E^n называется *регулярной*, если она допускает в окрестности произвольной точки регуляр-

ную параметризацию, т. е. задание с помощью регулярной вектор-функции

$$x = x(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

причем для вектор-функции $x(u)$ квадратичная дифференциальная форма $(dx)^2$ является положительно определенной. Мы будем говорить, что *гиперповерхность F принадлежит классу $C^{k,\alpha}$, $k \geq 1$, $\alpha > 0$* , если существует локальная параметризация класса $C^{k,\alpha}$, т. е. вектор-функция $x(u)$, задающая гиперповерхность, имеет непрерывные производные порядка k , удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α . Если гиперповерхность допускает какую-нибудь регулярную параметризацию класса $C^{k,\alpha}$, $k \geq 1$, то при подходящем выборе системы декартовых координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ она допускает в окрестности произвольной точки явное задание уравнением

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где φ — регулярная функция класса $C^{k,\alpha}$. В частности, для такого задания в окрестности произвольной точки A гиперповерхности достаточно взять опорную гиперплоскость в точке A за координатную гиперплоскость $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Регулярная гиперповерхность ($k \geq 1$) является гладкой, ее опорная гиперплоскость в произвольной точке $x(u)$ проходит параллельно векторам $\partial x / \partial u_1, \partial x / \partial u_2, \dots, \partial x / \partial u_{n-1}$. В случае явного задания гиперповерхности уравнением $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ опорная (касательная) гиперплоскость имеет угловые коэффициенты $\partial \varphi / \partial x_1, \partial \varphi / \partial x_2, \dots, \partial \varphi / \partial x_{n-1}$.

Пусть F — регулярная выпуклая гиперповерхность в E^{n+1} . Отметим на гиперповерхности произвольную точку O и проведем через нее опорную (касательную) гиперплоскость α . Пусть d — произвольное направление из точки O в гиперплоскости α . Кривая γ_d , которая получается в сечении гиперповерхности двумерной плоскостью, проходящей через направление d и нормаль гиперповерхности в точке O , называется *нормальным сечением*, а кривизна кривой γ_d в точке O называется *нормальной кривизной* гиперповерхности в направлении d . Введем прямоугольные декартовы координаты $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, приняв гиперплоскость α за координатную гиперплоскость $x_1, \dots, x_n$. Гиперповерхность F в окрестности точки O

задается уравнением

$$x_0 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

а ее нормальная кривизна в точке O в направлении d будет

$$k_d = d^2\varphi/(dx)^2.$$

Нормальная кривизна выпуклой гиперповерхности в любом направлении d неотрицательна, $k_d \geq 0$. Направление d из точки O на гиперповерхности F называется *главным*, если нормальная кривизна k_d в этом направлении стационарна. Для того чтобы направление оси x_1 в точке O было главным, необходимо и достаточно, чтобы $\partial^2\varphi/\partial x_k \partial x_1 = 0$ при $k > 1$, при этом $\partial^2\varphi/\partial x_1^2 = k_1$.

Пусть r — вектор точки гиперповерхности, а v — единичный вектор внешней нормали в этой точке. Тогда, если направление d является главным, то для этого направления

$$k_d dr = dv \quad (\text{формула Родрига}).$$

Если выпуклая гиперповерхность регулярна, по крайней мере дважды дифференцируема, и нормальные кривизны ее в любой точке и по любому направлению строго положительны, то опорная функция обладает той же степенью регулярности. В этом случае первые производные опорной функции $\partial H/\partial x_i$ имеют простое значение: это координаты точки, в которой опорная плоскость с внешней нормалью направления x_i касается гиперповерхности. Воспользуемся этим свойством для определения главных радиусов кривизны гиперповерхности через опорную функцию. Пусть x — вектор произвольной точки гиперповерхности и ξ — единичный вектор внешней нормали в этой точке. По формуле Родрига при дифференцировании по главному направлению

$$dx - R d\xi = 0.$$

Замечая, что $x = \nabla H(\xi)$, получаем

$$\sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\xi_j - R d\xi_i \right) = 0.$$

Следовательно, главные радиусы нормальной кривизны удовлетворяют уравнению

$$\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - R \delta_{ij} \right\| = 0.$$

Это уравнение имеет корень $R = 0$, так как $\|\partial^2 H / \partial \xi_i \partial \xi_j\| = 0$ из-за однородности первой степени функции H . Поэтому, опуская это несущественное значение R , получаем для остальных значений R уравнение вида

$$R^n - A_1 R^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

где A_i — суммы главных миноров i -го порядка матрицы $(\partial^2 H / \partial \xi_i \partial \xi_j)$ на единичной сфере $|\xi| = 1$.

Для удобства исследования гиперповерхности в окрестности данной точки A мы специализируем выбор декартовой системы координат $x_0, x_1, \dots, x_n$ следующим образом. Начало координат поместим внутри тела, ограниченного гиперповерхностью, на внутренней нормали в точке A , координатную гиперплоскость $x_1, x_2, \dots, x_n$ проведем параллельно касательной гиперплоскости в точке A , а направления координатных осей $x_1, x_2, \dots, x_n$ возьмем параллельно главным направлениям гиперповерхности в точке A . Введем далее вместо опорной функции H функцию

$$h(x_1, \dots, x_n) = H(1, x_1, \dots, x_n).$$

Ввиду указанной специализации в выборе системы координат в точке A будем иметь $\partial h / \partial x_i = 0$, $\partial^2 h / \partial x_i \partial x_j = 0$ при $i \neq j$, $\partial^2 h / \partial x_i^2 = R_i$, где R_i — главный радиус кривизны гиперповерхности в направлении оси x_i .

Найдем уравнение для главных радиусов кривизны гиперповерхности в точке с внешней нормалью направления $(1, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Имеем

$$H(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0 h(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0).$$

Дифференцируя это равенство, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k} &= h_k, \quad k > 0, & \frac{\partial H}{\partial x_0} &= h - \sum_{\alpha > 0} \frac{x_\alpha}{x_0} h_\alpha, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{x_0} h_{ij} & \text{при } i, j > 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_0 \partial x_k} &= - \sum_{\alpha > 0} \frac{x_\alpha}{x_0^2} h_{\alpha k} & \text{при } k > 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} &= \sum_{\alpha, \beta > 0} \frac{x_\alpha x_\beta}{x_0^3} h_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Если эти значения производных подставить в уравнение $\| H_{ij} - R\delta_{ij} \| = 0$ и упростить первую строку и столбец определителя с помощью остальных строк и столбцов, то уравнение принимает вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{R}{x_0^2} \left(x_0^2 + \sum_{\alpha>0} x_\alpha^2 \right) & R \frac{x_1}{x_0} & \dots & R \frac{x_n}{x_0} \\ R \frac{x_1}{x_0} & \frac{h_{11}}{x_0} - R & \dots & \frac{h_{1n}}{x_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R \frac{x_n}{x_0} & \frac{h_{n1}}{x_0} & \dots & \frac{h_{nn}}{x_0} - R \end{array} \right\| = 0.$$

В это уравнение вместо переменных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ надо подставить координаты вектора внешней нормали направления $1, x_1, \dots, x_n$, т. е. величины

$$\frac{1}{\left(1 + \sum_{\alpha>0} x_\alpha^2 \right)^{1/2}}, \frac{x_1}{\left(1 + \sum_{\alpha>0} x_\alpha^2 \right)^{1/2}}, \dots, \frac{x_n}{\left(1 + \sum_{\alpha>0} x_\alpha^2 \right)^{1/2}}.$$

При этом уравнение для главных радиусов кривизны в точке с нормалью указанного направления принимает вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} R\lambda^2 & Rx_1 & Rx_2 & \dots & Rx_n \\ Rx_1 & \lambda h_{11} - R & \lambda h_{12} & \dots & \lambda h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Rx_n & \lambda h_{n1} & \lambda h_{n2} & \dots & \lambda h_{nn} - R \end{array} \right\| = 0,$$

где $\lambda = (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

3. Площадь и кривизна выпуклой гиперповерхности.
Пусть F — выпуклая гиперповерхность. Отметим внутри тела, ограниченного гиперповерхностью, какую-нибудь точку O . Построим последовательность многогранников P_n , сходящихся к гиперповерхности F . При достаточно больших n точка O является внутренней точкой для многогранников P_n . Пусть теперь M — любое борелевское множество на гиперповерхности F . Спроектируем множество M из центра O на многогранник P_n и обозначим через $S_{n\alpha}$ площадь (лебегову меру) проекции множества M на грань α многогранника P_n . Положим

$$S_n = \sum_\alpha S_{n\alpha},$$

где суммирование распространяется на все грани α многогранника P_n . Оказывается, при $n \rightarrow \infty$ последовательность S_n сходится к некоторому пределу $S(M)$. Этот предел не зависит ни от выбора точки O , ни от последовательности многогранников P_n и называется *площадью гиперповерхности F на множестве M* .

Если гиперповерхность регулярна и задана на множестве M вектор-функцией $r(u_1, \dots, u_n)$, то определяемая так площадь вычисляется по формуле

$$S(M) = \int_M \sqrt{g} \, du_1 \dots du_n,$$

где g — дискриминант квадратичной формы $(dr)^2$. В случае явного задания гиперповерхности уравнением $z = z(x_1, \dots, x_n)$

$$S(M) = \int_M \sqrt{1 + (\nabla z)^2} \, dx_1 \dots dx_n.$$

Пусть M — произвольное множество на гиперповерхности F . Определим множество M^* на единичной гиперсфере Ω следующим образом. Точку x на Ω отнесем к множеству M^* , если в M найдется точка x' и в ней опорная гиперплоскость α' такие, что внешняя нормаль к α' , будучи отложена из центра Ω , имеет своим концом точку x . Множество M^* называется *сферическим изображением* множества M . Оказывается, если множество M — борелевское, то его сферическое изображение M^* будет также борелевским, следовательно, оно измеримо. В этом случае площадь множества M^* на гиперсфере Ω называется *кривизной множества M на гиперповерхности F* . Кривизна, как функция множеств, является неотрицательной вполне аддитивной функцией на борелевских множествах. Она обладает важным свойством сходимости. Именно, если последовательность выпуклых гиперповерхностей F_n сходится к гиперповерхности F , то их кривизны слабо сходятся к кривизне F . Это значит, в частности, что если гиперповерхности F_n спроектировать из внутренней точки на гиперповерхность F , то для любой непрерывной функции f , заданной на F ,

$$\lim \int_{F_n} f \, d\omega_n = \int_F f \, d\omega.$$

Роль проектирования здесь сводится к перенесению функции f , заданной на F , на гиперповерхность F_n .

Пусть x — произвольная точка и G — произвольная область на гиперповерхности F . Обозначим через $S(G)$ площадь области G , а через $\omega(G)$ — ее кривизну. Предел отношения $\omega(G)/S(G)$, когда область G стягивается к точке x , если этот предел существует, называется *гауссовой кривизной гиперповерхности в точке x* . Регулярная, дважды дифференцируемая, выпуклая гиперповерхность имеет в каждой точке определенную гауссову кривизну, равную произведению главных кривизн. Действительно, если параметризовать гиперповерхность так, чтобы направления координатных линий (u) в точке x были главными направлениями, а это всегда возможно, то по формуле Родрига в точке x имеем $k_\alpha r_\alpha = v_\alpha$. Площадь области G

$$S(G) = \int_G V \bar{g}_r du_1 \dots du_n.$$

А площадь сферического изображения области

$$\omega(G) = \int_G V \bar{g}_v du_1 \dots du_n.$$

Когда область G стягивается к точке x , отношение $V \bar{g}_v / V \bar{g}_r$ сходится к пределу $k_1 k_2 \dots k_n$. Отсюда следует, что $\omega(G)/S(G)$ сходится к тому же пределу — произведению главных кривизн. Следует заметить, что существование и даже непрерывность гауссовой кривизны в смысле данного выше общего определения не влечет за собой регулярности выпуклой гиперповерхности в смысле двукратной дифференцируемости (А. Д. Александров).

Как показано в п. 2, главные радиусы кривизны выпуклой гиперповерхности являются корнями уравнения

$$\frac{1}{R} \|H_{\alpha\beta} - R\delta_{\alpha\beta}\| = 0,$$

где производные $H_{\alpha\beta}$ берутся на единичной гиперсфере. Свободный член этого уравнения — произведение главных радиусов кривизны — представляет собой сумму главных миноров определителя $\|H_{\alpha\beta}\|$. Обратной величиной будет гауссова кривизна. Через функцию $h(x_1, \dots, x_n) =$

$= H(1, x_1, \dots, x_n)$ гауссова кривизна определяется по формуле

$$K = \frac{1}{\|h_{\alpha\beta}\| (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2} + 1}}$$

(см. п. 2).

Пусть M — любое множество точек на единичной гиперсфере. Определим множество M' на выпуклой гиперповерхности F , относя точку x к M' , если ее сферическое изображение принадлежит M . Оказывается, если M — борелевское множество, то M' также будет борелевским. В этом случае оно имеет определенную площадь. Обозначим ее $\sigma(M)$. Величина σ , как функция множеств, называется *поверхностной функцией*. Оказывается, поверхностная функция, определяемая с помощью выпуклой гиперповерхности, является неотрицательной, вполне аддитивной функцией на кольце борелевских множеств единичной гиперсферы. Подобно кривизне, поверхностные функции выпуклых гиперповерхностей F_n , сходящихся к гиперповерхности F , слабо сходятся к поверхностной функции гиперповерхности F . Это значит, что для любой непрерывной функции f , заданной на единичной гиперсфере Ω ,

$$\lim \int_{\Omega} f d\sigma_n = \int_{\Omega} f d\sigma,$$

где σ_n и σ обозначают поверхностные функции F_n и F .

В случае регулярной, дважды дифференцируемой выпуклой гиперповерхности F поверхностная функция допускает простое аналитическое выражение

$$\sigma(M) = \int_M \frac{d\omega_{\xi}}{K(\xi)},$$

где $K(\xi)$ — гауссова кривизна гиперповерхности в точке с внешней нормалью ξ , а интегрирование выполняется по площади множества M .

С помощью поверхностной функции просто определяется объем тела, ограниченного выпуклой гиперповерхностью. Именно, имеет место формула

$$V(T) = \frac{1}{n} \int_F H d\sigma,$$

где H — опорная функция тела T , а σ — поверхностная функция. Эта формула очевидна, когда тело является многогранником. В общем случае она получается путем приближения тела T выпуклым многогранником P и переходом к пределу при $P \rightarrow T$. Как показано выше, для тел с регулярной поверхностью $d\sigma = R_1 \dots R_n d\omega$. Произведение главных радиусов кривизны $R_1 R_2 \dots R_n = \Sigma \|H_{\alpha\beta}\|'$, где $\|H_{\alpha\beta}\|'$ — главные миноры определителя $\|H_{\alpha\beta}\|$ на единичной сфере. Таким образом, получается важная формула

$$V = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H \sum \|H_{\alpha\beta}\|' d\omega.$$

4. Смешение выпуклых тел. Пусть $T_1, T_2, \dots, T_m$ — выпуклые тела, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — неотрицательные числа. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ — векторы с концами внутри тел $T_1, T_2, \dots, T_m$ соответственно. Когда концы векторов x_k независимо зачерчивают тела T_k , конец вектора

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

зачерчивает некоторое тело T . Из выпуклости тел T_k следует выпуклость тела T . Относительно тела T говорят, что оно получено *смешением* тел T_k . Смешение выпуклых тел впервые рассматривали Брун и Минковский [1]. Из определения опорной функции выпуклого тела следует, что опорная функция тела T

$$H = \sum_k \lambda_k H_k,$$

где H_k — опорные функции тел T_k .

Из выражения объема тела T с помощью опорной и поверхностной функций

$$V = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H \sum \|H_{\alpha\beta}\|' d\omega \quad (\text{п.3})$$

в случае тел T_k с регулярной поверхностью легко доказывается, что объем тела T , полученного смешением тел T_k , является однородным многочленом относительно переменных λ_k с коэффициентами, зависящими только от тел T_k :

$$V(T) = \sum \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_m} V(T_{k_1}, T_{k_2}, \dots, T_{k_m}).$$

Коэффициенты $V(T_{k_1}, \dots, T_{k_m})$ называются *смешанными объемами*. Этот результат распространяется на случай любых тел T_k путем приближения их телами с регулярной поверхностью и предельным переходом.

Из выражения объема тела T через поверхностную функцию получается следующая формула для смешанного объема:

$$V(T_1, T_2, \dots, T_2) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_2 d\sigma_1,$$

где H_2 — опорная функция тела T_2 , а σ_1 — поверхностная функция тела T_1 .

Особый интерес представляет смешение двух тел T_0 и T_1

$$T_{\vartheta} = (1 - \vartheta) T_0 + \vartheta T_1 \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

Оказывается, функция $\sqrt[n]{V(T_{\vartheta})}$ является вогнутой по ϑ , т. е.

$$\sqrt[n]{V(T_{\vartheta})} \geq (1 - \vartheta) \sqrt[n]{V(T_0)} + \vartheta \sqrt[n]{V(T_1)},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда тела T_0 и T_1 гомотетичны (*теорема Бруна — Минковского*).

Из вогнутости функции $\sqrt[n]{V(T_{\vartheta})}$ по переменному ϑ получается *неравенство Минковского* для смешанных объемов. Именно,

$$V^n(T_0, T_1, \dots, T_1) \geq V^{n-1}(T_1) V(T_0),$$

причем равенство имеет место только в случае гомотетичных тел T_0 и T_1 .

Обозначим через

$$S_m = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j} R_{\alpha_1} R_{\alpha_2} \dots R_{\alpha_m}$$

нормированную элементарную симметрическую функцию главных радиусов кривизны гиперповерхности. Будем называть S_m *функцией кривизны порядка m* . Как известно, она выражается через сумму главных миноров порядка m определителя $\|H_{\alpha\beta}\|$. Отсюда следует, что для

линейной комбинации выпуклых тел T_1 и T_2

$$T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$$

функция кривизны S_m представляет собой однородный многочлен степени m относительно λ_1 и λ_2 . Коэффициенты этого многочлена называются *смешанными функциями кривизны*.

А. Д. Александров доказал [3] для смешанных функций кривизны следующее неравенство:

$$[S_m(T_1, T_2, \dots, T_2)]^m \geq S_m(T_1, \dots, T_1) [S_m(T_2, \dots, T_2)]^{m-1}.$$

Здесь равенство достигается тогда и только тогда, когда квадратичные формы $d^2 H_1$ и $d^2 H_2$ пропорциональны.

Отметим в заключение следующую связь между смешанными функциями кривизны и смешанными объемами [3]:

$$\int_{\Omega} S_m(T_1, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_{m-1}) H_2 d\omega = V(T_1, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_m, E, \dots, E),$$

$$\int_{\Omega} S_m(T_1, T_1, \dots, T_1) H_2 d\omega = V(T_2, T_1, \dots, T_1, E, \dots, E).$$

В этих формулах E обозначает единичный шар.

§ 2. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МИНКОВСКОГО

В этом параграфе мы воспроизводим классический результат Минковского о существовании и единственности выпуклой гиперповерхности с заданной гауссовой кривизной $K(v)$. Мы называем решение Минковского обобщенным, так как оно не содержит никакой информации о регулярности гиперповерхности, даже если заданная функция $K(v)$ — аналитическая. Регулярное решение проблемы для случая, когда функция $K(v)$ достаточно регулярна, будет дано в следующем параграфе.

1. Постановка проблемы. Единственность решения. Пусть $K(v)$ — заданная на гиперсфере Ω положительная, непрерывная функция. Проблема Минковского состоит в решении вопроса о существовании выпуклой гиперповерхности F , для которой $K(v)$ является гауссовой

кривизной в точке с внешней нормалью ν . Что касается гауссовой кривизны, то она понимается в смысле определения, данного в п. 2 § 1. Именно, *гауссовой кривизной в точке x гиперповерхности F* называется предел отношения площади сферического изображения области G к площади области $\omega(G)/S(G)$, когда область стягивается к точке x . Такое определение гауссовой кривизны не предполагает регулярность гиперповерхности.

Если задана кривизна гиперповерхности, как функция внешней нормали, то тем самым задана и поверхностная функция гиперповерхности

$$\sigma = \int \frac{d\omega}{K(\nu)}.$$

Обратно, задание поверхностной функции как функции множеств на единичной сфере равносильно заданию гауссовой кривизны как функции внешней нормали. Отсюда получается естественное обобщение проблемы: при каких условиях заданная на единичной гиперсфере неотрицательная вполне аддитивная функция множеств σ может быть поверхностной функцией некоторой выпуклой гиперповерхности? В частности, если функция σ равна нулю всюду, кроме конечного числа точек $\nu_1, \dots, \nu_m$, в которых она принимает положительные значения $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, речь идет о существовании выпуклого многогранника, грани которого имеют внешние нормали ν_k и площади σ_k .

Минковский решает проблему сначала для выпуклых многогранников. Затем с помощью заданной функции $K(\nu)$ строится функция множеств σ . Функция σ приближается функцией σ' с конечным числом нагрузок σ_k в точках ν_k . Для этого сфера, на которой задана функция σ , подвергается разбиению на малые области g_k , с помощью которых векторы ν_k и числа σ_k определяются условием

$$\sigma_k \nu_k = \int_{g_k} \nu d\zeta.$$

Далее доказывается существование многогранника P_g с направлениями граней ν_k и площадями σ_k . Наконец, осуществляется предельный переход при условии, что диаметры областей g_k разбиения неограниченно убывают.

При этом многогранники P_g сходятся к выпуклой гиперповерхности, которая и решает проблему, т. е. имеет в каждой точке с внешней нормалью ν предписанную гауссову кривизну $K(\nu)$.

Заметим, что если гиперповерхность F дает решение проблемы, то гиперповерхность F' , получаемая сдвигом F , также дает решение. Отсюда получается некоторое условие на поверхностную функцию, необходимое для разрешимости проблемы. Рассмотрим сначала случай многогранника. Пусть многогранник P сдвигается на малое расстояние в положение P' . Сдвиг многогранника P можно представлять себе как деформацию. Пусть ν_k — внешние нормали многогранника P , а S_k — площади граней. Пусть сдвиг многогранника P происходит на малое расстояние ε в направлении единичного вектора e . Рассмотрим изменение объема многогранника P , связанное со смещением его граней. Смещение грани с нормалью ν_k дает изменение объема $\simeq S_k(\nu_k e) \varepsilon$. Общее изменение объема равно нулю, так как многогранники P и P' равны. Отсюда

$$\sum_k (\nu_k e) S_k = 0.$$

И так как вектор e произволен, то

$$\sum_k \nu_k S_k = 0.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть F — выпуклая гиперповерхность. Построим последовательность выпуклых многогранников P_n , сходящуюся к F . Поверхностные функции σ_n многогранников слабо сходятся к поверхностной функции F . По доказанному для многогранников

$$\int \nu d\sigma_n = 0.$$

В силу слабой сходимости поверхностных функций отсюда следует для F

$$\int_{\Omega} \nu d\sigma = 0.$$

Это условие, таким образом, является необходимым для существования выпуклой гиперповерхности с данной

поверхностной функцией σ . Если гиперповерхность имеет определенную гауссову кривизну, то $d\sigma = d\omega/K(v)$, и, следовательно, необходимое условие можно записать так:

$$\int_{\Omega} \frac{v d\omega}{K(v)} = 0.$$

Рассмотрим вопрос о единственности решения проблемы. Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые гиперповерхности, дающие решение проблемы, т. е. имеющие одну и ту же поверхностную функцию. Покажем, что гиперповерхности F_1 и F_2 совмещаются параллельным переносом. Пусть T_1 и T_2 — выпуклые тела, ограниченные гиперповерхностями F_1 и F_2 , H_1 и H_2 — опорные функции, а σ_1 и σ_2 — поверхностные функции гиперповерхностей. Имеем

$$V(T_1, T_2, \dots, T_2) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_2 d\sigma_1. \quad (\text{п. 4 §1})$$

Так как по условию $\sigma_1 \equiv \sigma_2$, то правая часть равенства представляет собой объем тела T_2 . Таким образом,

$$V(T_1, T_2, \dots, T_2) = V(T_2).$$

Согласно неравенству Минковского для смешанных объемов

$$V^n(T_1, T_2, \dots, T_2) \geq V^{n-1}(T_2)V(T_1).$$

Отсюда, принимая во внимание предыдущее равенство, заключаем, что $V(T_2) \geq V(T_1)$. А так как тела T_1 и T_2 равноправны, то должно иметь место и обратное неравенство $V(T_1) \geq V(T_2)$. Следовательно, $V(T_2) = V(T_1)$. Но тогда в неравенстве Минковского должно быть точное равенство. А это может быть тогда и только тогда, когда тела T_1 и T_2 совмещаются параллельным переносом. Единственность решения проблемы доказана.

Итак, выпуклая гиперповерхность однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется своей поверхностной функцией. В частности, выпуклый многогранник определяется однозначно направлениями и площадями граней.

2. Существование выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ — конечная система единичных векторов, не лежащих в одной гиперплоскости, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ —

положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_k \sigma_k \xi_k = 0. \quad (*)$$

Тогда существует и притом единственный, с точностью до параллельного переноса, выпуклый многогранник, у которого внешние нормали граней — ξ_k , а площади — σ_k (теорема Минковского).

Доказательство этой теоремы у нас будет основано на следующей лемме об отображении А. Д. Александрова. Пусть A и B — два многообразия одного и того же числа измерений. Пусть дано отображение φ многообразия A в многообразии B , удовлетворяющее условиям:

1. В каждой компоненте многообразия B содержатся образы точек из A .

2. Отображение φ взаимно однозначно и непрерывно.

Тогда, если точки b_k многообразия B являются образами точек a_k многообразия A и сходятся к точке b , то в A существует точка a , которая имеет своим образом b и является пределом для точек a_k .

Для того чтобы применить эту лемму к доказательству теоремы Минковского, отметим некоторые свойства многогранников, удовлетворяющих условию (*). Прежде всего заметим, что внешние нормали ξ_k не могут быть направлены в одно полупространство. Действительно, если бы векторы ξ_k были направлены в одно полупространство, то ввиду некомпланарности векторов ξ_k и положительности чисел σ_k вектор $\sum \sigma_k \xi_k$ был бы отличен от нуля, что противоречит условию (*).

Какова бы ни была система векторов ξ_k , удовлетворяющая условию (*), существует выпуклый многогранник с внешними нормальными его граней ξ_k . Действительно, проведем единичную гиперсферу Ω и через концы векторов ξ_k , отложенные из центра Ω , проведем касательные гиперплоскости к Ω . Для каждой гиперплоскости отметим то полупространство, которому принадлежит Ω . Пересечение этих полупространств есть выпуклый многогранник P . Многогранник P не может быть бесконечным, так как в противном случае ему принадлежал бы некоторый луч l , исходящий из центра гиперсферы Ω , а, следовательно, векторы ξ_k были бы направлены в полупространство, определяемое гиперплоскостью, проходящей через центр Ω перпендикулярно к лучу l .

Совокупность всех выпуклых многогранников с внешними нормальными векторами граней ξ_k и площадями граней σ_k , удовлетворяющими условию $0 < a \leq \sigma_k \leq b < \infty$, ограничена, т. е. все такие многогранники могут быть расположены внутри шара достаточно большого радиуса. Допустим, что утверждение неверно. Тогда среди рассматриваемых многогранников найдутся многогранники сколь угодно большого диаметра. Пусть P — один из таких многогранников с диаметром D и A, B — его наиболее удаленные точки, $AB = D$. Покажем, что проекция многогранника P на гиперплоскость, перпендикулярную к прямой AB , имеет сколь угодно малую площадь, если достаточно велико D . В самом деле, произведем симметрирование по Штейнеру многогранника P относительно гиперплоскости α , проходящей перпендикулярно к отрезку AB через его середину. При этом получится новый многогранник P' , симметричный относительно гиперплоскости α . Он имеет тот же объем, что и многогранник P , и ту же площадь проекции на гиперплоскость α . Проекция многогранника P' на гиперплоскость α является сечением многогранника P' гиперплоскостью α . Обозначим через B' это сечение. Два конуса с вершинами A и B и общим основанием B' содержатся в P' , поэтому их общий объем не больше объема V многогранника P' . Отсюда получается неравенство

$$\frac{1}{n} DS \leq V,$$

где S — площадь B' . Так как многогранники рассматриваемой совокупности имеют равномерно ограниченную площадь поверхности, не большую mb , то они согласно изопериметрическому неравенству имеют равномерно ограниченный объем. Отсюда следует, что при достаточно большом диаметре D многогранника он имеет сколь угодно малую площадь S проекции на гиперплоскость, перпендикулярную к прямой AB . Однако ввиду некомпланарности векторов ξ_k и ограниченности снизу площадей граней ($\sigma_k \geq a > 0$) площадь проекций многогранника P на любую гиперплоскость ограничена снизу положительным числом. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Обратимся теперь к доказательству теоремы. Для этого определим прежде всего многообразия A и B , о которых

идет речь в лемме об отображении. Точками многообразия A являются классы равных и параллельно расположенных многогранников, т. е. многогранников, совмещаемых параллельным переносом. Так как каждый многогранник определяется опорными числами — расстояниями гиперплоскостей граней от некоторой фиксированной внутренней точки, а число граней m , то многообразие A имеет размерность $m - n$. Точки многообразия B являются точками m -мерного евклидова пространства с координатами σ_k , удовлетворяющими условиям $\sigma_k > 0$, $\sum \sigma_k \xi_k = 0$. Оно также имеет размерность $m - n$. Отображение φ , о котором идет речь в лемме, состоит в сопоставлении данному классу равных параллельно расположенных многогранников точки пространства с координатами $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, равными площадям граней многогранников. Покажем, что условия леммы об отображении для многообразий A , B и отображения φ выполнены.

Первое условие леммы об отображении выполняется потому, что многообразие B , как пересечение выпуклых множеств, выпукло, а, следовательно, связно. Кроме того, как показано выше, существует многогранник с внешними нормальными векторами ξ_k . Следовательно, в каждой компоненте многообразия B (в данном случае единственной) есть образы точек A . Второе условие леммы содержит требование взаимной однозначности отображения φ . В данном случае речь идет о равенстве двух выпуклых многогранников с данными направлениями и площадями граней. Это равенство доказано в п. 1. Непрерывность отображения φ очевидна.

Проверим, наконец, третье условие леммы. В данном случае это условие сводится к тому, что если у последовательности многогранников R^k площади граней σ_α^k сходятся к числам $\sigma_\alpha > 0$, то сами многогранники после надлежащего сдвига сходятся, и предельный многогранник имеет площади граней σ_α . Пусть начало координат O является центром тяжести многогранников R^k . Этого всегда можно добиться параллельным переносом. По теореме Бляшке из последовательности многогранников R^k можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к выпуклому телу, может быть, вырождающемуся. Но вырождение невозможно, иначе при достаточно большом k площадь проекции R^k на некоторую гиперплоскость будет сколь угодно малой, что невозможно. Следовательно,

предельное тело P не вырождается. Очевидно, оно является многогранником с внешними нормальными векторами граней ξ_α , площадями σ_α и центром тяжести в начале координат O . Любая другая сходящаяся подпоследовательность P^k даст многогранник с теми же внешними нормальными векторами граней, площадями и центром тяжести, следовательно, совпадающий с P . Таким образом, выполнимость третьего условия леммы доказана.

Согласно лемме об отображении все точки многообразия B являются образами точек многообразия A , т. е. для каждой системы положительных чисел σ_α , удовлетворяющих условию $\sum \sigma_k \xi_k = 0$, существует многогранник с внешними нормальными векторами граней ξ_k и площадями σ_k . Теорема доказана.

3. Существование выпуклой гиперповерхности с данной гауссовой кривизной. Пусть на единичной гиперсфере Ω задана непрерывная положительная функция $K(\xi)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\Omega} \frac{\xi d\omega}{K(\xi)} = 0.$$

Тогда существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса выпуклая гиперповерхность F , для которой $K(\xi)$ будет гауссовой кривизной в точке с внешней нормалью ξ (*теорема Минковского*).

Доказательство. Разобьем гиперсферу Ω на малые области g_k . Определим числа σ_k и единичные векторы ξ_k условиями

$$\sigma_k \xi_k = \int_{g_k} \frac{\xi d\omega}{K(\xi)}.$$

Очевидно,

$$\sum \sigma_k \xi_k = 0.$$

Поэтому существует выпуклый многогранник P с площадями граней σ_k и внешними нормальными векторами к этим граням ξ_k .

Построим теперь последовательность разбиений гиперсферы такую, чтобы диаметры областей g_k^m m -го разбиения неограниченно убывали при $m \rightarrow \infty$. Пусть P^m — выпуклый многогранник, построенный указанным выше способом для m -го разбиения гиперсферы на области g_k^m . Покажем, что многогранники P^m ограничены в совокуп-

ности. Пусть d_m — диаметр многогранника P^m и A, B — две его точки, отстоящие на расстояние d_m . Обозначим через α гиперплоскость, перпендикулярную отрезку AB , проходящую через его середину. Проекцию многогранника P^m на гиперплоскость α обозначим Q^m , а его площадь — S^m .

Покажем, что величина S^m ограничена снизу некоторым числом S^0 . Действительно,

$$S^m = \frac{1}{2} \sum_k \sigma_k |\xi_k e| = \frac{1}{2} \sum_k \left| \int_{g_k^m} \frac{(e\xi) d\omega}{K(\xi)} \right|,$$

где e — единичный вектор направления AB . По условию теоремы $K(\xi)$ непрерывна, следовательно, ограничена сверху: $K(\xi) < a$. Поэтому

$$S^m \geq \frac{1}{2a} \sum_k \left| \int_{g_k^m} (e\xi) d\omega \right|.$$

Обозначим через M^m совокупность тех областей g_k^m , в которых $|\xi e| > \varepsilon > 0$. Тогда

$$S^m \geq \frac{\varepsilon}{2a} \left| \int_{M^m} d\omega \right|.$$

При достаточно малом ε и достаточно большом m , следовательно, при малых диаметрах областей g_k^m

$$\int_{M^m} d\omega > \frac{S}{2},$$

где S — площадь гиперсферы Ω . Таким образом, при достаточно большом m проекция многогранника P^m на гиперплоскость α имеет площадь

$$S^m > \frac{\varepsilon S}{4a}.$$

Подвергнем многогранник P^m симметрированию относительно гиперплоскости α . При этом его объем V^m не изменяется, а сечение Q^m гиперплоскостью α будет иметь площадь S^m . Общий объем двух конусов с вершинами

A , B и основанием Q^m не больше объема V^m . Следовательно,

$$V^m \geq \frac{1}{n} S^m d_m \geq \frac{1}{n} d_m \frac{\varepsilon S}{2a}.$$

Покажем теперь, что объем V^m ограничен сверху. Площадь поверхности многогранника

$$\sigma^m = \sum_k \sigma_k^m \leq \sum_k \int_{g_k^m} \frac{d\omega}{K(\xi)}.$$

А так как $K(\xi)$ строго положительна, больше некоторого $b > 0$, то

$$\sigma^m \leq \frac{1}{b} S.$$

Оценка сверху для площади поверхности P^m дает в силу изопериметрического неравенства оценку сверху для объема

$$V^m < V^0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n} d_m \frac{\varepsilon S}{2a} < V^0.$$

Отсюда получается равномерная, не зависящая от m оценка для d_m , т. е. многогранники P^m ограничены в совокупности.

По теореме Бляшке из равномерно ограниченной последовательности многогранников P^m можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предельная гиперповерхность P^0 не может вырождаться. Действительно, в противном случае при достаточно большом m многогранник P^m должен иметь сколь угодно малую ширину в некотором направлении t^m . Если спроектировать такой многогранник на гиперплоскость, параллельную t^m , то ввиду ограниченности диаметра d_m площадь проекции должна быть сколь угодно малой. Однако, как показано выше, площадь проекции ограничена снизу числом $\varepsilon S/2a$. Поэтому вырождение P^0 невозможно.

Так как поверхностные функции многогранников P^m слабо сходятся к поверхностной функции σ гиперповерхности P^0 , то

$$\sigma(M) = \int_M \frac{d\omega}{K(\xi)}.$$

Отсюда видно, что предельная гиперповерхность имеет гауссову кривизну $K(\xi)$. Теорема доказана.

А. Д. Александров [3] обобщил теорему Минковского, доказав существование выпуклой гиперповерхности с произвольной поверхностной функцией. Именно, если σ — неотрицательная вполне аддитивная функция на единичной гиперсфере Ω , удовлетворяющая условиям

$$\int_{\Omega} \xi d\sigma = 0, \quad \int_{\Omega} |e\xi| d\sigma > a > 0$$

для любого единичного вектора e , то существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса выпуклая гиперповерхность, для которой σ будет поверхностной функцией.

§ 3. РЕГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МИНКОВСКОГО

В предыдущем параграфе было получено обобщенное решение проблемы Минковского о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности с данной гауссовой кривизной $K(\xi)$. В настоящем параграфе будет доказано, что если функция $K(\xi)$ достаточно регулярна, то проблема Минковского имеет регулярное решение. Именно, будет доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть заданная на единичной гиперсфере Ω положительная регулярная, класса C^m , $m \geq 3$, функция $K(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \frac{\xi d\omega}{K(\xi)} = 0.$$

Тогда существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса регулярная, класса $C^{m+1, \alpha}$ ($\alpha > 0$) выпуклая гиперповерхность с гауссовой кривизной $K(\xi)$. Если функция $K(\xi)$ — аналитическая, то гиперповерхность — также аналитическая.

1. Априорные оценки радиусов нормальной кривизны выпуклой гиперповерхности. Пусть F — регулярная выпуклая гиперповерхность в $n+1$ -мерном евклидовом пространстве. Пусть $K(\xi)$ — гауссова кривизна гиперповерхности как функция единичного вектора внешней

нормали ξ . Положим $1/K(\xi) = \varphi(\xi)$. Функция φ единичного вектора ξ задана единичной гиперсферой Ω — сферическим изображением гиперповерхности.

Т е о р е м а 2. *Радиусы нормальной кривизны гиперповерхности F допускают априорную оценку*

$$R \leq \max_{\xi, \gamma} \varphi^{\frac{1}{n}} \left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi''}{\varphi} \right) \right]^{1 - \frac{1}{n}},$$

где дифференцирование выполняется в точке ξ по дуге большого круга на сферическом изображении гиперповерхности F , а тах берется по всем ξ и γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $R(\xi, \gamma)$ радиус нормальной кривизны гиперповерхности F в точке с внешней нормалью ξ в направлении γ . Для некоторых ξ_0 и γ_0 функция R достигает максимума. Пусть A — точка гиперповерхности F с внешней нормалью ξ_0 . Введем в пространстве декартовы прямоугольные координаты $z, x_1, \dots, x_n$, приняв какую-нибудь точку O на внутренней нормали гиперповерхности в точке A за начало координат, за ось z примем прямую OA , а оси $x_1, x_2, \dots, x_n$ направим параллельно главным направлениям гиперповерхности в точке A . Пусть для определенности ось x_1 имеет направление, в котором радиус нормальной кривизны R_1 имеет наибольшее значение. По теореме Родрига ось x_1 имеет направление γ_0 .

Пусть H — опорная функция гиперповерхности F , а

$$H_0 = R_1 (z^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

— опорная функция гиперсферы радиуса R_1 . Так как радиусы нормальной кривизны гиперповерхности F не превосходят R_1 , то $d^2H \leq d^2H_0$. В частности, $\partial^2 H / \partial x_1^2 \leq \leq \partial^2 H_0 / \partial x_1^2$. Введем в рассмотрение нормированные опорные функции

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= H(1, x_1, \dots, x_n), \\ h_0(x_1, \dots, x_n) &= H_0(1, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Для этих функций также выполняется неравенство $\partial^2 h / \partial x_1^2 \leq \partial^2 h_0 / \partial x_1^2$, причем в точке A ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) имеет место равенство. Положим

$$w_1 = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial x_1^2} \right) \frac{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}{(1 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}.$$

Функция w_1 достигает в точке A максимума, равного нулю. А так как

$$\frac{\partial^2 h_0}{\partial x_1^2} \frac{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = R_1,$$

то функция

$$w = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \frac{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

достигает в точке A максимума R_1 . Таким образом, оценка максимума радиусов нормальной кривизны гиперповерхности F равносильна оценке максимума функции w в точке A ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Условимся обозначать дифференцирование функции h по переменному x_i индексом этого переменного. Тогда функция h , задающая гиперповерхность F , удовлетворяет уравнению

$$(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2} + 1} \|h_{ij}\| = \varphi \quad (1)$$

(§ 1, п. 2), а функция

$$w = h_{11} \frac{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2)$$

При нашем выборе системы координат в точке A , т. е. при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, будем иметь

$$h_{ii} = R_i, \quad h_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

где R_i — главные радиусы кривизны гиперповерхности в точке A . Дифференцируя равенство (2) в точке A , где w достигает максимума, получим

$$w_i = h_{11i} = 0, \quad (3)$$

$$w_{11} = (h_{11})_{11} + 3R_1 \leq 0, \quad w_{ii} = (h_{11})_{ii} + R_1, \quad i \neq 1. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (1) в точке A по x_1 и замечая, что $h_{ij} = 0$ при $i \neq j$, будем иметь

$$\sum_i h_{11} \dots (h_{ii})_1 \dots h_{nn} = \varphi_1,$$

или

$$\varphi \sum_i \frac{(h_{ii})_1}{h_{ii}} = \varphi_1. \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (1) в точке A по x_1 дважды, получим

$$(n+2)\varphi + \varphi \sum_i \frac{(h_{ii})_{11}}{h_{ii}} + \varphi \sum_{i \neq j} \frac{(h_{ii})_1}{h_{ii}} \frac{(h_{jj})_1}{h_{jj}} - \\ - \varphi \sum_{i \neq j} \frac{(h_{ij})_1^2}{h_{ii} h_{jj}} = \varphi_{11}. \quad (6)$$

Принимая во внимание равенство (5), заключаем, что

$$\sum_{i \neq j} \frac{(h_{ii})_1}{h_{ii}} \frac{(h_{jj})_1}{h_{jj}} \leq \left(\frac{\varphi_1}{\varphi} \right)^2. \quad (7)$$

Из неравенств (4) в точке A получается

$$\frac{(h_{11})_{11}}{h_{11}} \leq -3, \quad \frac{(h_{ii})_{11}}{h_{ii}} \leq -\frac{R_1}{R_i} \quad \text{при } i \neq 1. \quad (8)$$

Теперь из равенства (6) и неравенств (7), (8) следует

$$(n-1)\varphi - \varphi R_1 \sum_{i>1} \frac{1}{R_i} + \frac{\varphi_1^2}{\varphi} \geq \varphi_{11}. \quad (9)$$

Замечая, что

$$\sum_{i>1} \frac{1}{R_i} \geq (n-1) \left(\frac{1}{R_2} \cdots \frac{1}{R_n} \right)^{\frac{1}{n-1}} = (n-1) \left(\frac{R_1}{\varphi} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

из неравенства (9) получаем

$$(n-1)\varphi - (n-1)\varphi R_1 \left(\frac{R_1}{\varphi} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{\varphi_1^2}{\varphi} \geq \varphi_{11}, \quad (10)$$

откуда

$$R_1 \leq \varphi^{\frac{1}{n}} \left[1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\varphi_1^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi_{11}}{\varphi} \right) \right]^{1-\frac{1}{n}}. \quad (11)$$

Пусть γ_0 — большой круг на единичной сфере $z^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ в направлении x_1 . Тогда

$$x_1 = \operatorname{tg} s,$$

где s — дуга круга γ_0 . Отсюда следует, что при $s = 0$, т. е. при $x_1 = 0$

$$\varphi_1 = \varphi'_s, \quad \varphi_{11} = \varphi''_{ss}.$$

Замечая теперь, что R_1 есть максимальный радиус нормальной кривизны гиперповерхности F , получаем утверждаемую теоремой оценку

$$R \leq \max_{\xi, \gamma} \varphi^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi''}{\varphi} \right) \right)^{1 - \frac{1}{n}}.$$

Здесь дифференцирование выполнено по дуге большого круга γ , исходя из точки ξ на единичной сфере, где задана функция φ , а $\max$ берется по всем точкам сферы ξ и всем направлениям γ .

2. Некоторые вспомогательные формулы. Пусть

$$z = u(x_1, \dots, x_n)$$

— выпуклая гиперповерхность с положительной гауссовой кривизной. Тогда форма

$$dz^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

— положительно определенная. Следуя Е. Калаби [10], введем в рассмотрение риманову метрику, определяемую метрическим тензором

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Обозначим

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \Phi, \quad \ln \sqrt{\Phi} = \varphi.$$

Символы Хриstoffеля первого ряда для рассматриваемой метрики

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = A_{ijk}.$$

Величины A_{ijk} симметричны по всем индексам. Отметим следующее соотношение:

$$g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta k} = \varphi_k. \tag{1}$$

Оно получается дифференцированием равенства $\|g_{\alpha\beta}\| = \Phi$. Из выражения ковариантной производной

$$A_{ijk,l} = \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + g^{hm} (A_{hjk} A_{mil} + A_{ihk} A_{mjl} + A_{ijh} A_{mkl})$$

видно, что она симметрична по любой паре индексов, в частности

$$A_{ijk,l} = A_{ijl,k}. \quad (2)$$

Пользуясь известными формулами, находим *тензор Риччи*

$$R_{ijkl} = g^{hm} (A_{hil} A_{mjk} - A_{hik} A_{mjl}). \quad (3)$$

Принимая во внимание соотношение (1), из выражения для тензора Римана (3) находим *тензор Риччи* R_{ik} и *скалярную кривизну* R . Имеем

$$\begin{aligned} R_{ik} &= g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} g^{hm} (A_{hil} A_{mjk} - A_{hik} A_{mjl}) = \\ &= g^{jl} g^{hm} A_{hil} A_{mjk} - g^{hm} A_{hik} \Phi_m. \end{aligned}$$

Положим

$$R_{ik} = g^{jl} g^{hm} A_{hil} A_{mjk}.$$

Тогда

$$R_{ik} = \bar{R}_{ik} - g^{hm} A_{hik} \Phi_m. \quad (4)$$

Скалярная кривизна

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{ik} \bar{R}_{ik} - g^{hm} \Phi_h \Phi_m.$$

Положим

$$\bar{R} = g^{ik} \bar{R}_{ik} = A^{ijk} A_{ijk}.$$

Тогда

$$R = \bar{R} - g^{hm} \Phi_h \Phi_m. \quad (5)$$

Отметим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \Delta \bar{R} = A^{ijk} \Phi_{i,jk} + \bar{R}_{ij} \bar{R}^{ij} + R_{ijkl} R^{ijkl} + A_{ijk,\alpha} A^{ijk,\alpha}, \quad (6)$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами. Вывод этого равенства по существу содержится в работе [10]. Мы воспроизведем этот вывод. Прежде всего оператор Δ применяется к тензору A_{ijk} . При этом существенно используется симметрия по индексам первой ковариантной производ-

ной $A_{ijk,l}$ тензора A_{ijk} , соотношение (1) и тождество Риччи для разности вторых ковариантных производных. Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta A)_{ijk} &= g^{lm} A_{ijk,lm} = g^{lm} A_{ljk,mi} + g^{lm} (A_{ljk,im} - A_{ljk,mi}) = \\ &= g^{lm} A_{ljk,mi} + g^{lm} (A_{hjk} R_{lim}^h + A_{lhk} R_{jim}^h + A_{ljh} R_{kim}^h) = \\ &= \varphi_{j,ki} + A^{hlm} (A_{hli} A_{mjk} + A_{hlj} A_{mki} + A_{hlk} A_{mij}) - \\ &\quad - 2A_{i\beta}^{\alpha} A_{j\gamma}^{\beta} A_{k\alpha}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \bar{R} &= \frac{1}{2} g^{lm} \bar{R}_{,lm} = A^{ijk} (\Delta A)_{ijk} + A^{ijk,l} A_{ijk,l} = \\ &= A^{ijk} \varphi_{i,jk} + 3A^{ijk} A^{hlm} A_{hli} A_{mjk} - 2A^{ijk} A_{i\beta}^{\alpha} A_{j\gamma}^{\beta} A_{k\alpha}^{\gamma} + \\ &+ A^{ijk,l} A_{ijk,l} = A^{ijk} \varphi_{i,jk} + \bar{R}_{ij} \bar{R}^{ij} + R_{ijkl} R^{ijkl} + A^{ijk,l} A_{ijk,l}. \end{aligned}$$

Равенство (6) доказано.

Обозначим

$$B_{\alpha\beta\gamma ijkl} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta\gamma,i} A_{jkl} - A_{\alpha\beta\gamma} A_{jkl,i}).$$

Непосредственно проверяется следующее равенство:

$$B_{\alpha\beta\gamma ijkl} B^{\alpha\beta\gamma ijkl} = \frac{1}{2} \bar{R} A_{\alpha\beta\gamma,i} A^{\alpha\beta\gamma,i} - \frac{1}{8} g^{ij} \bar{R}_{,i} \bar{R}_{,j}. \quad (7)$$

Составим теперь выражение $\Delta \sqrt{\bar{R}}$ и воспользуемся соотношениями (6) и (7). Тогда получим

$$\begin{aligned} \Delta \sqrt{\bar{R}} &= \frac{\Delta \bar{R}}{2 \sqrt{\bar{R}}} - \frac{g^{ij} \bar{R}_{,i} \bar{R}_{,j}}{4 \bar{R}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{R}}} (\bar{R}_{ij} \bar{R}^{ij} + R_{ijkl} R^{ijkl} + A^{ijk} \varphi_{i,jk}) + \frac{2}{\bar{R}^{3/2}} B_{\alpha\beta\gamma ijkl} B^{\alpha\beta\gamma ijkl}. \end{aligned}$$

Так как последнее слагаемое первой части неотрицательно, то

$$\Delta \sqrt{\bar{R}} \geq \frac{1}{\sqrt{\bar{R}}} (\bar{R}_{ij} \bar{R}^{ij} + R_{ijkl} R^{ijkl} + A^{ijk} \varphi_{i,jk}). \quad (8)$$

Обозначим для краткости $\sqrt{\bar{R}} = \sqrt{A^{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma}} = \psi$.

Л е м м а. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\Delta \psi \geq \frac{n+1}{n(n-1)} \psi^3 + c_1 \psi^2 + c_2 \psi + c_3 + c_0 |\partial \psi / \partial x|, \quad (9)$$

где $|\partial\psi/\partial x|$ — максимум модулей первых производных ψ по x_k , а c_0, c_1, c_2 и c_3 оцениваются через вторые производные $u(x)$ и производные функции φ до третьего порядка.

Доказательство. Так как

$$\psi = \sqrt{A^{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma}},$$

то из выражений R_{ik} и $\bar{R}_{ik}$ получается

$$R_{ij}R^{ij} = \bar{R}_{ij}\bar{R}^{ij} + a_1\psi^3 + a_2\psi^2, \quad (10)$$

где a_1 и a_2 оцениваются в зависимости от вторых производных $u(x)$ и производных первого порядка $\varphi(x)$. Далее,

$$A^{ijk}\varphi_{i,jk} = b_0\psi|\partial\psi/\partial x| + b_1\psi^3 + b_2\psi^2 + b_3\psi, \quad (11)$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 оцениваются через вторые производные $u(x)$ и производные $\varphi(x)$ третьего порядка. Действительно,

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{ij} + \varphi_\alpha g^{\alpha s} A_{sij},$$

$$\varphi_{i,jk} = \varphi_\alpha g^{\alpha s} A_{sijk} + (*),$$

где $(*)$ обозначает квадратичное относительно величин $A_{\lambda\mu\nu}$ выражение с коэффициентами, допускающими оценку. Поэтому

$$A^{ijk}\varphi_{i,jk} = \varphi_\alpha g^{\alpha s} A^{ijk} A_{ijk s} + (**).$$

Очевидно, первое слагаемое правой части равенства оценивается величиной $\psi|\partial\psi/\partial x| + O(\psi^3)$.

В работе [10] для положительно определенной римановой метрики получены следующие неравенства:

$$\frac{1}{n} R^2 \leq R_{ij}R^{ij}, \quad \frac{2}{n-1} R_{ij}R^{ij} \leq R_{ijkl}R^{ijkl}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \geq \frac{n+1}{n(n-1)} R^2.$$

Замечая, что $R = \bar{R} - g^{hm} \varphi_h \varphi_m$, с помощью (10) получаем

$$\bar{R}_{ij}\bar{R}^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \geq \frac{n+1}{n(n-1)} \psi^4 + d_1\psi^3 + d_2\psi^2. \quad (12)$$

Теперь из неравенства (8) с помощью (11) и (12) получается неравенство, о котором идет речь в лемме. Лемма доказана.

3. Априорная оценка третьих производных опорной функции выпуклой гиперповерхности. Пусть $z(x_1, \dots, x_n)$ — выпуклая регулярная, класса C^5 , функция, удовлетворяющая в области G переменных, $x_1, x_2, \dots, x_n$ дифференциальному уравнению

$$\|z_{ij}\| = \Phi > 0, \quad (1)$$

где $\|z_{ij}\|$ — гессиан функции z , а Φ — положительная регулярная, класса C^3 , функция, заданная в области G .

Т е о р е м а 3. *В каждой внутренней точке области G третьи производные решения уравнения (1) допускают оценку в зависимости только от вторых производных решения, производных функции Φ до третьего порядка и расстояния точки от границы области G .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $z(x_1, \dots, x_n)$ — выпуклая, а ее гессиан $\|z_{ij}\|$ положителен, то квадратичная форма d^2z — положительно определенная. Введем в области G риманову метрику, задаваемую линейным элементом d^2z ($g_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}$). Положим

$$\psi = \frac{1}{2} (g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma} z_{ijk} z_{\alpha\beta\gamma})^{1/2}.$$

Согласно лемме п. 1 имеет место неравенство

$$\Delta\psi \geq \frac{n+1}{n(n-1)} \psi^3 + c_1\psi^2 + c_2\psi + c_3 + c_0 |\partial\psi/\partial x|, \quad (2)$$

где $|\partial\psi/\partial x|$ — максимум модулей первых производных ψ по x_k , а c_0, c_1, c_2 и c_3 оцениваются через вторые производные функции z и производные Φ до третьего порядка.

Пусть O — произвольная внутренняя точка области G и ρ — расстояние ее от границы области G . Обозначим через ω шар радиуса ρ с центром в точке O . Рассмотрим внутри шара ω функцию

$$w = \psi\lambda, \quad \lambda = \rho^2 - \sum_k (x_k)^2.$$

Функция w неотрицательна и обращается в нуль на поверхности шара, следовательно, в некоторой внутренней

точке A шара достигает максимума w_0 . В точке A

$$w_\alpha = \partial w / \partial x_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому в этой точке

$$\psi_\alpha = w \left(\frac{1}{\lambda} \right)_\alpha, \quad \psi_{\alpha\beta} = \frac{w_{\alpha\beta}}{\lambda} + w \left(\frac{1}{\lambda} \right)_{\alpha\beta}.$$

Введем значения производных ψ в неравенство (2). Имеем

$$\Delta\psi = g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} + g^{ik}\Gamma_{ik}^j\psi_j,$$

где Γ_{ik}^j — символы Христовффея второго рода для метрики, задаваемой линейным элементом d^2z . Их выражения даны в п. 2. Для нас сейчас важно лишь то, что эти выражения содержат только вторые производные функции z и линейно третьи производные Φ . Так как функция w достигает в точке A максимума, то в этой точке

$$g^{\alpha\beta}w_{\alpha\beta} \leq 0.$$

Поэтому

$$\Delta\psi \leq g^{\alpha\beta}w \left(\frac{1}{\lambda} \right)_{\alpha\beta} + c^\alpha w \left(\frac{1}{\lambda} \right)_\alpha, \quad (3)$$

где c^α — коэффициенты, допускающие оценку сверху. Из неравенств (2) и (3) получается неравенство для w в точке A , т. е. для w_0 . Именно,

$$\frac{n+1}{n(n-1)}w_0^3 + Q_2(w_0) \leq 0, \quad (4)$$

где Q_2 — многочлен второй степени относительно w_0 с коэффициентами, допускающими оценку в зависимости от указанных величин — производных z второго порядка и производных Φ до третьего порядка.

Из неравенства (4) очевидным образом следует существование оценки для величины w_0 . А так как в центре шара O

$$\psi \leq w_0 / \rho^2,$$

то получается оценка и для ψ в центре шара. Эта оценка зависит, кроме указанных выше производных z и Φ , еще от расстояния ρ точки O до границы области G .

Так как форма d^2z — положительно определенная, а вторые производные z ограничены, то собственные зна-

чения этой формы, а следовательно, и формы $g^{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta$ допускают оценку. Отсюда следует, что оценка для

$$\psi^2 = g^{i\alpha}g^{j\beta}g^{k\gamma}z_{\alpha\beta\gamma}z_{ijk}$$

влечет за собой оценку для третьих производных z_{ijk} в зависимости от тех же величин, т. е. вторых производных z_{ij} , производных Φ до третьего порядка и расстояния точки до границы области G . Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Пусть F — регулярная, класса C^5 , замкнутая выпуклая гиперповерхность с положительной гауссовой кривизной $K(\xi)$. Пусть $H(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — опорная функция гиперповерхности. Тогда для функции H и ее производных до третьего порядка на единичной сфере можно указать оценку в зависимости только от гауссовой кривизны $K(\xi)$ и ее производных до третьего порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 (п. 2) радиусы нормальной кривизны гиперповерхности F допускают оценку. Так как собственные значения квадратичной формы d^2H на единичной гиперсфере являются главными радиусами кривизны, то отсюда очевидным образом следует существование оценки для вторых производных H_{ij} на единичной гиперсфере. Так как диаметр гиперповерхности F допускает оценку (п. 2 § 2), а начало координат — внутри гиперповерхности, то отсюда следует оценка для функции H и ее первых производных. Все они не превосходят диаметра гиперповерхности. Рассмотрим теперь оценку третьих производных.

Пусть $\omega_i : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ — единичный шар с центром в начале координат O . Отметим на поверхности шара какую-нибудь точку A и оценим в ней третьи производные опорной функции H . Введем новые координаты, приняв прямую OA за ось x_0 . Положим

$$h(x_1, \dots, x_n) = H(1, x_1, \dots, x_n).$$

Функция h удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\|h_{ij}\| = \frac{1}{K}(x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1)^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Оценка вторых производных H гарантирует оценку вторых производных h в области $\omega' : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1$. Оценка вторых производных h в ω' гарантирует оценку

для третьих производных h в центре области ω' , т. е. в точке A . Третьи производные функции H в точке A очевидным образом выражаются через производные h и, следовательно, для них получается оценка. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Теоремой 1 утверждается существование регулярной выпуклой гиперповерхности F , для которой заданная на единичной гиперсфере функция $K(\xi)$ является гауссовой кривизной. Если обозначить через $\varphi(\xi)$ величину, обратную $K(\xi)$, то речь идет о существовании решения дифференциального уравнения

$$D(H, \dots, H) = \varphi(\xi) \quad (1)$$

при условии

$$\int_{\Omega} \xi \varphi(\xi) d\omega = 0,$$

где D обозначает сумму главных миноров гессиана $\|H_{ij}\|$ положительно однородной первой степени функции H на единичной гиперсфере. Положим

$$\varphi(\xi, t) = 1 - t + t\varphi(\xi), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и рассмотрим уравнение с параметром t

$$D(H, \dots, H) = \varphi(\xi, t) \quad (2)$$

при условии

$$\int_{\Omega} \xi \varphi(\xi, t) d\omega = 0.$$

Для доказательства существования решения уравнения (1) достаточно для уравнения (2) доказать следующие два предложения.

1. Если уравнение (2) разрешимо при некотором t_0 , то оно разрешимо и при всех значениях t , достаточно близких к t_0 .

2. Если уравнение (2) разрешимо при значениях параметра $t_1, t_2, \dots, t_n$, сходящихся к t_0 , то оно разрешимо и при $t = t_0$.

Из этих двух предложений следует, что множество тех значений параметра t , для которых уравнение (2) разрешимо, открыто и замкнуто. Следовательно, так как оно не пусто (при $t = 0$ уравнение тривиально разрешимо), ему принадлежат все значения t , $0 \leq t \leq 1$. В частности,

разрешимо уравнение (1), отвечающее значению параметра $t = 1$. Таким образом, для разрешимости уравнения (1) достаточно доказать предложения 1 и 2.

Докажем предложение 1. Предполагая зависимость H от параметра t , обозначим результат дифференцирования $D(H, \dots, H)$ по t через $D(H, \dots, Z)$, где $Z = \partial H / \partial t$. Рассмотрим теперь уравнение

$$D(H, \dots, H, Z) = \psi(\xi), \quad (3)$$

где H — заданная опорная функция выпуклой гиперповерхности с положительной гауссовой кривизной, а Z — положительно однородная первой степени искомая функция. Оказывается, уравнение (3) является самосопряженным эллиптическим относительно Z уравнением [7]. Как известно, вопрос о разрешимости уравнения (3) находится в связи с наличием у соответствующего однородного уравнения

$$D(H, \dots, H, Z) = 0 \quad (4)$$

нетривиальных решений. При наличии таковых правая часть ψ уравнения (3) должна быть ортогональна этим решениям. В связи с этим покажем прежде всего, что уравнение (4) имеет ровно $n + 1$ независимых решений. Именно,

$$Z_0 = x_0, \quad Z_1 = x_1, \dots, Z_n = x_n. \quad (5)$$

Действительно, из уравнения (4) следует, что при деформации гиперповерхности F с опорной функцией H в гиперповерхность F_τ с опорной функцией $H + \tau Z$ поверхностная функция стационарна при $\tau = 0$. Отсюда так же, как и в доказательстве единственности решения проблемы Минковского в п. 1, заключаем, что неравенство Минковского для тел T и T_τ переходит в равенство с точностью до τ^2 , т. е.

$$V^n(T_\tau, T, \dots, T) = V^{n-1}(T) V(T_\tau) + O(\tau^2).$$

При этом, как это следует из доказательства неравенства Минковского [2], тела T и T_τ должны быть гомотетичны с точностью до τ^2 , т. е.

$$H_\tau = H + \tau Z = \lambda H + \tau \sum a_k x_k + O(\tau^2).$$

А так как гауссова кривизна F_τ стационарна при $\tau = 0$, то $\lambda = 1$. Следовательно, $Z = \sum a_k x_k$, т. е. уравнение (4)

не имеет других решений, кроме (5). При наличии решений (5) однородного уравнения (4) условия разрешимости неоднородного уравнения (3) сводятся к системе равенств

$$\int_{\Omega} \xi_k \psi(\xi) d\omega = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (6)$$

где ξ_k — компоненты единичного вектора ξ , или, что то же самое

$$\int_{\Omega} \xi \psi(\xi) d\omega = 0.$$

Само решение может быть представлено с помощью функции Грина. Именно, на единичной сфере

$$H(\eta) = \int_{\Omega} G(\xi, \eta) \psi(\xi) d\omega_{\xi}.$$

Решение нелинейного уравнения (2) получается методом последовательных приближений. Пусть значению $t = t_0$ отвечает решение с опорной функцией H . Положим

$$D(H, H, \dots, Z) = D(H + Z) - D(H) + R(H, Z).$$

Тогда для значений параметра t , близких к t_0 , речь идет о решении уравнения

$$D(H, \dots, Z) = \Delta t (\varphi(\xi) - 1) + R(H, Z).$$

Для решения этого уравнения применяется метод последовательных приближений [6]. Последовательные приближения находятся из уравнения

$$D(H, \dots, Z_k) = \Delta t (\varphi(\xi) - 1) + R(H, Z_{k-1}). \quad (7)$$

Покажем, что условия разрешимости уравнения (7) относительно Z_k выполнены, т. е.

$$\int_{\Omega} \xi (\Delta t (\varphi(\xi) - 1) + R(H, Z_{k-1})) d\omega = 0.$$

Действительно, для опорной функции $H + \lambda Z$ (λ — параметр)

$$\int_{\Omega} \xi D(H + \lambda Z_{k-1}) d\omega = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D(H + \lambda Z_{k-1}) &= \sum_s \lambda^s A_s(H, Z_{k-1}) = \\ &= \lambda D(H, Z_{k-1}) + R_{\lambda}(H, Z_{k-1}). \end{aligned}$$

Из равенства (8), которое выполняется тождественно по λ , следует, что для всех A_s

$$\int_{\Omega} \xi A_s(H, Z_{k-1}) d\omega = 0,$$

а значит,

$$\int_{\Omega} \xi R(H, Z_{k-1}) d\omega = 0.$$

Что же касается равенства

$$\int_{\Omega} \xi \varphi(\xi) d\omega = 0,$$

то оно выполняется по условию теоремы. Итак, уравнение (7) разрешимо на каждом шаге последовательных приближений.

Предположим теперь, что функция $\varphi(\xi)$ — аналитическая. Тогда найденное решение уравнения (2), принадлежащее классу $C^{2,\alpha}$, будет аналитическим [11]. Пусть теперь t_k — последовательность значений параметра t , сходящаяся к t_0 , причем уравнение (2) разрешимо для каждого из этих значений t_k . Пусть H_k — решение, отвечающее значению параметра t_k . Покажем, что уравнение (2) разрешимо при $t = t_0$. Как показано в п. 3, для решения H уравнения (2) и его производных до третьего порядка может быть указана оценка в зависимости только от функции φ и ее производных до третьего порядка. Отсюда следует, что из последовательности решений H_k можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно вместе со вторыми производными на единичной гиперсфере. Предельная функция H для этой подпоследовательности принадлежит классу $C^{2,\alpha}$ при любом α ($0 < \alpha < 1$) и удовлетворяет уравнению (2) при $t = t_0$. По теореме об аналитичности решений уравнений эллиптического типа функция H будет аналитической. Таким образом, оба предложения 1 и 2 доказаны, а вместе с тем доказана теорема для случая аналитической функции φ .

Для того чтобы распространить этот результат на случай трижды дифференцируемой функции φ , аппроксимируем ее сначала аналитической функцией φ_a в метрике C^3 , удовлетворяя условию

$$\int_{\Omega} \xi \varphi_a(\xi) d\omega = 0.$$

Затем решаем проблему для случая аналитической функции φ_a и переходим к пределу в решении при $\varphi_a \rightarrow \varphi$. Априорные оценки, полученные в п. 3, гарантируют сходимость аналитических решений к функции класса $C^{2,\alpha}$, являющейся решением проблемы для данной трижды дифференцируемой функции φ . Из теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа следует, что если функция φ принадлежит классу C^m , $m \geq 3$, то решение принадлежит классу $C^{m+1,\alpha}$; если φ — аналитическая функция, то решение — аналитическое.

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МИНКОВСКОГО

Функцией кривизны порядка ν выпуклой гиперповерхности F в E^{n+1} называется элементарная симметрическая функция главных радиусов кривизны

$$S_\nu = \sum_{i_1 \neq i_2} R_{i_1} \dots R_{i_\nu}.$$

При $\nu = n$ функция кривизны представляет собой произведение главных радиусов кривизны. Проблему Минковского, рассмотренную в § 3, можно формулировать как проблему существования выпуклой гиперповерхности с заданной функцией кривизны порядка n , $S_n = \varphi_n(\xi)$. Естественное обобщение проблемы Минковского состоит в решении вопроса о существовании выпуклой гиперповерхности с заданной функцией кривизны любого данного порядка $\nu < n$. Оказывается, необходимое условие разрешимости этой общей проблемы так же, как и проблемы Минковского, состоит в том, чтобы

$$\int_{\Omega} \xi \varphi_\nu(\xi) d\omega = 0.$$

Однако, как показал А. Д. Александров, это условие не является достаточным. В настоящем параграфе проблема существования выпуклой гиперповерхности с данной функцией кривизны произвольного порядка решается при некотором дополнительном ограничении на функцию $\varphi_\nu(\xi)$. Так же, как и в случае проблемы Минковского, основным средством решения этой общей проблемы яв-

ляется получение априорных оценок для предполагаемого решения.

1. Оценка главных радиусов кривизны выпуклой гиперповерхности. Пусть F — регулярная замкнутая выпуклая гиперповерхность с положительной кривизной в $n + 1$ -мерном евклидовом пространстве. Обозначим через $\varphi_k(\xi)$ значение функции кривизны порядка k в точке с внешней нормалью ξ

$$S_k(R_1, \dots, R_n) = \varphi_k(\xi).$$

Положим

$$\bar{\varphi}_k = (\varphi_k/C_n^k)^{1/k},$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент.

Т е о р е м а 1. *Для радиусов нормальной кривизны выпуклой гиперповерхности F имеет место оценка*

$$R \leqslant \max_{\xi, \gamma} (\bar{\varphi}_k - \bar{\varphi}_k''), \tag{1}$$

где дифференцирование выполняется по дуге большого круга γ , исходящего из точки ξ на единичной сфере Ω (сферическом изображении гиперповерхности F), а $\max$ берется по всем точкам ξ сферы и по всем направлениям γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H — опорная функция гиперповерхности F . Тогда главные радиусы кривизны R_i являются корнями многочлена

$$P(R) = \|H_{ij} - R\delta_{ij}\| = 0,$$

где H_{ij} — вторые производные H на единичной сфере Ω (§ 2, п. 2). Положим

$$h(x_1, \dots, x_n) = H(1, x_1, \dots, x_n).$$

Тогда принимая во внимание однородность функции H , производные H_{ij} можно выразить через производные функции h , и уравнение $P(R) = 0$ для главных радиусов после элементарных преобразований представляется в виде

$$\begin{vmatrix} \lambda h_{11} - R & \lambda h_{12} & \dots & x_1 R \\ \lambda h_{21} & \lambda h_{22} - R & \dots & x_2 R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 R & x_2 R & \dots & R(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

(см. § 1, п. 2), где

$$h_{ij} = \partial^2 h / \partial x_i \partial x_j, \quad \lambda = (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Коэффициенты многочлена

$$P(-R) = R^{n+1} + S_1 R^n + \dots + S_n R \quad (3)$$

являются элементарными симметрическими функциями главных радиусов кривизны.

Как показано в § 3, п. 1, можно ввести так систему координат $x_1, \dots, x_n$, что функция

$$w = h_{11} \frac{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

в точке O : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ будет достигать максимума и этот максимум равен наибольшему радиусу нормальной кривизны гиперповерхности F . Таким образом, дело сводится к оценке этого максимума. В точке O

$$\left. \begin{aligned} h_{ii} = R_i, \quad h_{ij} = 0, \quad \text{при } i \neq j, \\ w_i = h_{11i} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$w_{11} = (h_{11})_{11} + 3R_1 \leq 0, \quad w_{ii} = (h_{11})_{ii} + R_1 \leq 0, \quad i > 1. \quad (5)$$

Вычислим производную $S'_k = \partial S_k / \partial x_1$ в точке O . Она является коэффициентом многочлена $P' = \partial P / \partial x_1$. Имеем

$$P' = \sum_i R (R_1 + R) \dots (R_{i-1} + R) (R_{i+1} + R) \dots (R_n + R) h'_{ii}.$$

Здесь суммирование по $i > 1$. Но так как $h'_{11} = 0$, то можно считать, что суммирование распространяется на все значения i от 1 до n . Коэффициент при R^{n-k} в многочлене P' имеет вид

$$S'_{k+1} = \sum_i h'_{ii} S_k^i,$$

где S_k^i — элементарная симметрическая функция переменных $R_1, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_n$. Замечая, что $S_1^i = \partial S_{k+i} / \partial R_i$, получим

$$S'_{k+1} = \sum_i h'_{ii} \frac{\partial S_{k+1}}{\partial R_i}.$$

Таким образом,

$$S'_k = dS_k, \quad \text{если} \quad dR_i = h'_{ii}. \quad (6)$$

Вычислим теперь вторую производную S''_k по переменному x_1 в точке O . Для этого продифференцируем многочлен P по x_1 дважды. Опуская соответствующие выкладки, приведем значение интересующего нас коэффициента S''_k :

$$S''_k = S^i_{k-1} (h_{11})_{ii} + (k+2) S_k - 2S^1_k + S^{ij}_{k-2} (h'_{ii} h'_{jj} - h'^2_{ij}),$$

где S^{ij}_{k-2} — элементарная симметрическая функция переменных $R_1, R_2, \dots$, кроме R_i и R_j . Для простоты записи знак суммирования здесь и в дальнейшем опускается. Принимая во внимание неравенство (5), после несложных преобразований получим

$$S''_k \leq -R_1 (n - k + 1) S_{k-1} + kS_k + S^{ij}_{k-2} (h'_{ii} h'_{jj} - h'^2_{ij}).$$

Мы усилим это неравенство, опустив слагаемое $-h'^2_{ij}$. Тогда

$$S''_k \leq -R_1 (n - k + 1) S_{k-1} + kS_k + S^{ij}_{k-2} h'_{ii} h'_{jj}. \quad (7)$$

Заметим, что

$$S^{ij}_{k-2} h'_{ii} h'_{jj} = d^2 S_k, \quad \text{если} \quad dR_i = h'_{ii},$$

и воспользуемся вогнутостью функции $(S_k)^{1/k}$ по переменным R_i . Имеем

$$d^2 (S_k^{1/k}) \leq 0.$$

Отсюда

$$d^2 S_k \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(dS_k)^2}{S_k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(S'_k)^2}{S_k}.$$

Теперь неравенство (7) усиливается следующим образом:

$$S''_k \leq -R_1 (n - k + 1) S_{k-1} + kS_k + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{S'^2_k}{S_k}.$$

Отсюда

$$R_1 \leq \frac{kS_k + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{S'^2_k}{S_k} - S''_k}{(n - k + 1) S_{k-1}}. \quad (8)$$

Замечая, что

$$\left(\frac{S_{k-1}}{C_n^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geq \left(\frac{S_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}},$$

из (8) получаем требуемую оценку:

$$R_1 \leq \bar{\varphi}_k - \bar{\varphi}_k'', \quad \bar{\varphi} = \left(\frac{S_k}{C_n^k}\right)^{1/k}.$$

Дифференцирование по x_1 в точке O можно заменить дифференцированием по дуге большого круга, исходящего в направлении оси x_1 (§ 3, п. 1). Теорема доказана.

2. Оценка производных опорной функции выпуклой гиперповерхности. Оценка радиусов нормальной кривизны выпуклой гиперповерхности, полученная в п. 1, позволяет просто оценить опорную функцию H и ее производные до второго порядка на единичной гиперсфере Ω в предположении, что начало координат находится внутри гиперповерхности. Действительно, пусть радиусы нормальной кривизны не превосходят R_0 . Пусть A и B — две наиболее удаленные точки гиперповерхности. Спроектируем гиперповерхность на двумерную плоскость, содержащую прямую AB . В проекции получим выпуклую область, ограниченную некоторой кривой γ с точками A и B на ней. Так как радиус кривизны кривой γ в каждой точке не превосходит R_0 , то длина кривой не больше $2\pi R_0$. Следовательно, расстояние между точками A и B не больше πR_0 . Так как начало координат находится внутри гиперповерхности, то значения H на единичной гиперсфере, как расстояния до опорных гиперплоскостей от начала координат, не больше πR_0 . Производные $\partial H / \partial x_i$, как координаты точки на гиперповерхности, не больше той же величины πR_0 . Что касается вторых производных $\partial^2 H / \partial x_i \partial x_j$, то их оценка через радиусы нормальной кривизны была получена в § 3. Таким образом, у гиперповерхности с данной функцией кривизны $\varphi_k(\xi)$ опорная функция на единичной гиперсфере и ее производные до второго порядка оцениваются через функцию $\varphi_k(\xi)$ и ее производные до второго порядка. Покажем теперь, что существует априорная оценка для постоянной Гёльдера вторых производных относительно некоторого положительного показателя α .

Главные радиусы кривизны гиперповерхности удовлетворяют уравнению $\|H_{ij} - R\delta_{ij}\| = 0$. Если ввести в это уравнение функцию $h(x_1, \dots, x_n) = H(1, x_1, \dots, x_n)$, то это уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda h_{11} - R & \lambda h_{12} & \dots & x_1 R \\ \lambda h_{21} & \lambda h_{22} - R & \dots & x_2 R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 R & x_2 R & \dots & \lambda^2 R \end{vmatrix} = 0,$$

где $\lambda = (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Из этого уравнения видно, что в окрестности точки $O(x = 0)$ главные радиусы кривизны с точностью до величин порядка $O(x^2)$ являются собственными значениями матрицы (h_{ij}) .

Выпуклая гиперповерхность с заданной функцией кривизны $\varphi_k(\xi)$, очевидно, удовлетворяет уравнению вида

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} \begin{vmatrix} h_{\alpha\alpha} & h_{\alpha\beta} & \dots & h_{\alpha\gamma} \\ h_{\beta\alpha} & h_{\beta\beta} & \dots & h_{\beta\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{\gamma\alpha} & h_{\gamma\beta} & \dots & h_{\gamma\gamma} \end{vmatrix} = \Phi, \quad (1)$$

где слева стоит сумма главных миноров k -го порядка матрицы $(h_{\alpha\beta})$. Что касается правой части, то она представляет собой алгебраическое выражение, содержащее вторые производные $h_{\alpha\beta}$, заданную функцию $\varphi_k(\xi)$ и квадраты независимых переменных $x_1^2, x_2^2, \dots$, причем в точке O правая часть обращается в $\varphi_k(\xi)$, а ее производные $\partial\Phi/\partial x_\alpha = \partial\varphi_k/\partial x_\alpha$.

Продифференцируем уравнение (1) по x_α и обозначим $\partial h/\partial x_\alpha = v$. Тогда для v получим линейное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{i,j} a_{ij} v_{ij} = f. \quad (2)$$

Рассмотрим собственные значения матрицы (a_{ij}) . Если повернуть систему координат так, чтобы направления координатных осей были главными направлениями в точке O , то коэффициенты a_{ij} в этой точке при $i \neq j$ будут нулями, а коэффициенты a_{ii} будут элементарными симметрическими функциями степени $k - 1$ главных радиусов

кривизны R_β , кроме R_i . Если такое преобразование координат выполнить для точки O' , близкой к O , то коэффициенты a_{ij} будут отличаться от указанных значений на величину порядка $O(x^2)$. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности точки O собственные числа матрицы (a_{ij}) допускают представление

$$\lambda_i = \partial S_k / \partial R_i + O(x^2).$$

Как показано в работе [12], для постоянных Гёльдера первых производных функции v , т. е. вторых производных h_{ij} относительно некоторого показателя $\alpha > 0$, можно дать априорную оценку в зависимости от функции v и коэффициентов уравнения, т. е. в зависимости от вторых производных h_{ij} и первых производных функции кривизны, если собственные значения матрицы (a_{ij}) удовлетворяют условию

$$(n-1) \sum_{i < k} (\lambda_i - \lambda_k)^2 < \left(\sum \lambda_i \right)^2,$$

или

$$(n-1) \sum_i \lambda_i^2 < \left(\sum \lambda_i \right)^2. \quad (3)$$

Покажем, что условие (3) выполняется, если функция кривизны $\varphi_k(\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2k-1}} \max_{\xi, \gamma} (\bar{\varphi}_k - \bar{\varphi}_k'') < \bar{\varphi}_k, \quad \bar{\varphi}_k = \left(\frac{\varphi_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}. \quad (4)$$

Действительно, в точке O

$$\lambda_i = a_{ii} = S_{k-1}^i(R_1, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_n),$$

$$\sum \lambda_i = (n-k+1) S_{k-1}(R_1, \dots, R_n).$$

Замечая, что

$$\left(\frac{S_{k-1}}{C_n^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geq \left(\frac{S_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \bar{\varphi}_k,$$

получим

$$\sum \lambda_i \geq (n-k+1) C_n^{k-1} \bar{\varphi}_k^{k-1}. \quad (5)$$

Пусть $\bar{R}_0$ — максимум радиусов нормальной кривизны. Тогда

$$\sqrt{\sum \lambda_i^2} \leq \sqrt{n} C_{n-1}^k R_0^{k-1}. \quad (6)$$

Из выражения (5) и (6) для $\sum \lambda_i$ и $\sum \lambda_i^2$ видно, что условие (3) для собственных значений λ_i выполняется, если имеет место неравенство (4). Ввиду строгого неравенства в (4) условие (3) выполняется не только в точке O , но и в некоторой ее δ -окрестности, причем для δ может быть указана положительная оценка снизу.

3. Существование выпуклой гиперповерхности с данной функцией кривизны. Пусть F — замкнутая выпуклая гиперповерхность и D_k — функция кривизны порядка k . Покажем, что

$$\int_{\Omega} \xi D_k d\omega = 0. \quad (1)$$

Построим параллельную к F выпуклую гиперповерхность F_t на расстоянии t . Из формулы Родрига для гиперповерхности F

$$dr = Rdn$$

следует

$$d(r + tn) = (R + t) dn.$$

Это значит, что в точке с той же внешней нормалью n гиперповерхность F_t имеет главные радиусы кривизны $R_i + t$. Функция кривизны порядка n для гиперповерхности F_t

$$D_{nt} = (R_1 + t) \dots (R_n + t) = D_n + tD_{n-1} + \dots,$$

где D_k — функции кривизны различных порядков для гиперповерхности F . Так как равенство

$$\int_{\Omega} \xi D_{nt} d\omega = 0$$

выполняется тождественно по t , то отсюда следует, что для функций кривизны всех порядков гиперповерхности F

$$\int_{\Omega} \xi D_k d\omega = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, для существования выпуклой гиперповерхности с заданной функцией кривизны условие (1) является необходимым. Однако, как показал А. Д. Александров, при $k < n$ условие (1) не является достаточным. Мы докажем существование выпуклой гиперповерхности с данной функцией кривизны при дополнительном условии, с помощью которого в и. 2 была доказана возможность получения априорных оценок постоянных Гёльдера для вторых производных опорной функции гиперповерхности.

Т е о р е м а 2. Пусть $\Phi_k(\xi)$ — заданная на единичной гиперсфере Ω регулярная положительная функция, удовлетворяющая условием

$$\int_{\Omega} \xi \Phi_k(\xi) d\omega = 0, \quad k > 1, \quad (2)$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}} \max_{\xi, \gamma} (\varphi_{kt} - \varphi_{kt}'') < \varphi_{kt}(\xi), \quad (3)$$

где $\varphi_{kt} = (\Phi_k/C_n^k)^{1/k}$, $\Phi_{kt} = t\Phi + 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда существует замкнутая выпуклая гиперповерхность F , для которой $\Phi_k(\xi)$ будет функцией кривизны k -го порядка. Если функция Φ_k принадлежит классу C^m ($m \geq 3$), то гиперповерхность принадлежит классу $C^{m+1, \alpha}$, $\alpha > 0$. Если функция Φ_k — аналитическая, то гиперповерхность — аналитическая.

Доказательство этой теоремы основано на тех же соображениях, что и в случае проблемы Минковского (§ 3). Именно, данная функция $\Phi_k(\xi)$ включается в семейство функций $\Phi_{kt}(\xi)$. После этого так же, как и в проблеме Минковского, дело сводится к доказательству двух предложений: 1) если проблема существования разрешима для некоторого значения параметра t , то она разрешима и для достаточно близких значений параметра; 2) если проблема разрешима для значений параметра t , сходящихся к t_0 , то она разрешима и при $t = t_0$. Мы не будем приводить доказательство предложений 1) и 2) полностью. Отметим только некоторые существенные моменты.

Пусть $D_k(H)$ — выражение функции кривизны гиперповерхности в виде суммы миноров матрицы $H_{\alpha\beta}$. Тогда проблема существования гиперповерхности F с заданной функцией кривизны Φ_{kt} сводится к проблеме

разрешимости дифференциального уравнения

$$D_k(H) = \Phi_{kt} \quad (4)$$

на гиперсфере Ω . Решение этого уравнения методом непрерывного продолжения по параметру t связано прежде всего с изучением линейного дифференциального уравнения для функции $Z = \partial H / \partial t$, которое получается дифференцированием уравнения (4) по параметру t :

$$D_k(H, Z) = \Phi_k - 1. \quad (5)$$

Оказывается, уравнение (5), если гиперповерхность F_t имеет строго положительную нормальную кривизну, является эллиптическим и самосопряженным. Самосопряженность линейного (по Z) оператора D_k следует из самосопряженности оператора $D_n(H + \lambda\Omega, Z)$ для параллельной гиперповерхности с опорной функцией $H + \lambda\Omega$. Из разложения $D_n(H + \lambda\Omega, Z)$ по параметру λ и самосопряженности оператора D_n следует самосопряженность операторов $D_k(H, Z)$ при любом k .

Относительно уравнения (5) можно доказать, что соответствующее однородное уравнение

$$D_k(H, Z) = 0, \quad (6)$$

как и в случае проблемы Минковского, имеет ровно $n + 1$ независимых решений

$$Z_0 = x_0, \quad Z_1 = x_1, \dots, Z_n = x_n. \quad (7)$$

Доказательство основано на том, что при деформации гиперповерхности с опорной функцией H в гиперповерхность с опорной функцией $H + tZ$ условие $D_k(H, Z) = 0$ выражает стационарность функции кривизны при $t = 0$. Отсюда с помощью неравенства А. Д. Александрова (§ 1, п. 4) для смешанных функций кривизны доказывается, что деформация гиперповерхности при $t = 0$ сводится к бесконечно малому сдвигу, т. е. Z — линейная функция. Так как решения (7) составляют полную систему независимых решений однородного уравнения (6), то неоднородное уравнение (5) всегда разрешимо, так как условия ортогональности

$$\int_{\Omega} \xi (\Phi_k - 1) d\omega = 0$$

выполнены.

Разрешимость уравнения (5) позволяет воспользоваться для решения уравнения (4) при значениях параметра t , близких к t_0 , методом последовательных приближений подобно тому, как в проблеме Минковского (§ 3). Доказательство второго предложения основано на возможности получения априорных оценок для опорной функции предполагаемого решения.

В заключение отметим одно обстоятельство. При $k < n$ положительность функции кривизны Φ_{kt} не гарантирует положительность главных радиусов кривизны. Поэтому в решении проблемы методом непрерывного продолжения по параметру t не исключена возможность нарушения строгой выпуклости, которая всегда предполагается. Покажем, что неравенство (3) исключает эту возможность. Действительно, если хотя бы одно R_i обращается в нуль, то

$$\Phi_{kt} < C_{n-1}^k R_0^k,$$

где R_0 — максимальный радиус нормальной кривизны гиперповерхности. Отсюда

$$\varphi_{kt} < \left(\frac{n-k}{n}\right)^{1/k} R_0 \leq \left(\frac{n-k}{n}\right)^{1/k} \max_{\xi, \gamma} (\varphi_{kt} - \varphi_{kt}'').$$

Но это противоречит условию (3), так как

$$\left(\frac{n-k}{n}\right)^{1/k} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/(2k-2)}$$

при $k > 1$.

4. Общая оценка для радиусов нормальной кривизны. Результат, касающийся априорной оценки радиусов нормальной кривизны выпуклой гиперповерхности, полученный в п. 1, можно существенно обобщить. Именно имеет место следующая общая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть функция f определена для $R_1, R_2, \dots, R_n > 0$, симметрична по всем переменным R_i , неотрицательна и вогнута, т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} \lambda_i \lambda_j \leq 0.$$

Пусть

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} f(R, R, \dots, R) = \alpha > 0.$$

Тогда для главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности F , удовлетворяющей уравнению

$$f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \varphi(\xi), \quad (1)$$

имеет место оценка

$$R \leq \max_{\xi, \gamma} \frac{1}{\alpha} (\varphi - \varphi'').$$

Теорема 1 является следствием теоремы 3. Она получается из теоремы 3, если в качестве функции f взять функцию $(S_k/C_n^k)^{1/k}$, где S_k — элементарная симметрическая функция главных радиусов кривизны. Легко видеть, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы. Для нее $\alpha = 1$, и следовательно, оценка, даваемая теоремой 3, совпадает с оценкой теоремы 1. Теорему 3 мы докажем сначала в предположении, что аргументы функции f входят в нее через элементарные симметрические функции S_k . Когда теорема будет доказана, это ограничение будет снято.

Пусть радиус нормальной кривизны гиперповерхности F достигает максимума в некоторой точке P . Введем систему декартовых координат $x_0, x_1, \dots, x_n$ таким образом, чтобы гиперплоскость $x_0 = 1$ касалась гиперповерхности в точке P и чтобы координатные направления $x_1, x_2, \dots, x_n$ совпадали с главными направлениями. Будем предполагать, что направление x_1 отвечает наибольшему из радиусов кривизны R_1 .

Пусть $H(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — опорная функция гиперповерхности F . Положим

$$h(x_1, \dots, x_n) = H(1, x_1, \dots, x_n).$$

Тогда как показано в § 3, п. 1, функция

$$w = h_{11} \frac{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}{1 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (2)$$

в точке $O(x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$ достигает максимума и этот максимум равен наибольшему радиусу нормальной кривизны гиперповерхности. Оценим величину этого максимума.

В точке $\bar{O}$ имеем

$$\left. \begin{aligned} h_{ii} &= R_i, \quad h_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j, \\ w_i &= (h_{11})_i = 0, \\ w_{11} &= (h_{11})_{11} + 3R_1 \leq 0, \quad w_{ii} = (h_{11})_{ii} + R_1 \leq 0, \quad i > 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Величины S_k на гиперповерхности являются функциями переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Условимся обозначать дифференцирование по переменной x_1 штрихом. Для производных S'_k и S''_k в п. 1 получены следующие выражения:

$$S'_k = \sum_i \frac{\partial S_k}{\partial R_i} h'_{ii}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S''_k &= \sum_i \frac{\partial S_k}{\partial R_i} (h_{11})_{ii} + (k+1) S_k - 2 \frac{\partial S_{k+1}}{\partial R_1} + \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} (h'_{ii} h'_{jj} - h'^2_{ij}). \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим вторую производную f по x_1 . Имеем

$$f'' = \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} S''_k + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial S_k \partial S_l} S'_k S'_l.$$

Подставляя сюда значения S'_k и S'_l из формул (4), (5) и $(h_{11})_{ii}$ из формул (3), после преобразований получим

$$\begin{aligned} f'' &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} w_{ii} - \sum_i (R_1 - R_i) \frac{\partial f}{\partial R_i} + \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} h'_{ii} h'_{jj} - \sum_{i,j,k} \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} h'^2_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как функция f неотрицательна и вогнута, то $\partial f / \partial R_i \geq 0$. Поэтому первое слагаемое правой части формулы (6) неположительно. Из-за вогнутости функции f неположительно и третье слагаемое. Покажем, что последнее слагаемое тоже неположительно. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial R_i} &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial R_i} = R_j \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_{k+1}}{\partial R_i \partial R_j}, \\ \frac{\partial f}{\partial R_j} &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial S_k}{\partial R_j} = R_i \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_{k+1}}{\partial R_i \partial R_j}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial S_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial R_i \partial R_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial R_j} - \frac{\partial f}{\partial R_i} \right) (R_i - R_j)^{-1}. \quad (7)$$

Принимая во внимание вогнутость и симметрию функции f по переменным R_i и R_j , из этой формулы заключаем, что последнее слагаемое правой части формулы (6) неположительно.

Дифференцирование f по x_1 в точке P можно заменить дифференцированием φ по дуге большого круга в направлении x_1 . Таким образом, получается неравенство

$$\varphi'' \leq - \sum_i (R_1 - R_i) \frac{\partial f}{\partial R_i}. \quad (8)$$

Так как функция f неотрицательна и вогнута, то

$$\sum_k R_k \frac{\partial f}{\partial R_k} \leq f, \quad \sum_k \frac{\partial f}{\partial R_k} \geq \alpha.$$

Поэтому усиливая неравенство (8), получим

$$\varphi'' \leq -\alpha R_1 + \varphi.$$

Отсюда $R_1 \leq (\varphi - \varphi'')/\alpha$, что и требовалось доказать.

Начиная доказательство, мы предполагали, что аргументы R_i функции f входят в нее через элементарные симметрические функции этих аргументов. Теперь мы освободимся от этого ограничения. Для этого мы аппроксимируем функцию f аналитической функцией $\bar{f}$, обладающей свойствами f (симметрия, неотрицательность и вогнутость), а гиперповерхность F — аналитической гиперповерхностью $\bar{F}$. По функции $\bar{f}$ и гиперповерхности $\bar{F}$ находим функцию $\bar{\varphi} = \bar{f}(\bar{F})$. Затем применяем полученную оценку и переходим к пределу $\bar{f} \rightarrow f$, $\bar{F} \rightarrow F$ в метрике C^4 .

Т е о р е м а 4. Пусть функция f переменных $R_1, R_2, \dots, R_n$ задана при $R_i > 0$, симметрична и не убывает по каждому из переменных. Пусть в области, определяемой неравенствами $\min \varphi \leq f \leq \max \varphi$, выполняются условия

$$\partial f / \partial R_i \geq c' > 0, \quad d^2 f / (df)^2 \leq c'' < \infty.$$

Тогда для главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности $\bar{F}$, удовлетворяющей уравнению (1), можно указать априорную оценку сверху.

Теорема 4 является следствием теоремы 3. Достаточно заметить, что функция

$$f_1 = 1 - e^{-c''f}$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.

§ 5. МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ МОНЖА—АМПЕРА

Уравнением Монжа — Ампера для двух переменных в простейшем случае называется уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = \varphi(x, y).$$

Естественным обобщением этого уравнения на случай n переменных является уравнение

$$\|u_{ij}\| = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

в котором слева стоит определитель из вторых производных искомой функции $u(x_1, \dots, x_n)$. Это уравнение и будет предметом исследования в настоящем параграфе. Мы будем предполагать всегда функцию φ положительной, а решение выпуклым. Для этого случая будет определено понятие обобщенного решения и доказана разрешимость задачи Дирихле в строго выпуклой области. Будет доказана регулярность строго выпуклого решения, если функция φ достаточно регулярна. Наконец, будет доказана регулярная разрешимость задачи Дирихле в строго выпуклой области с границей класса C^2 и граничными значениями искомой функции того же класса.

1. Существование выпуклого многогранника с заданными площадями нормального изображения в вершинах. Пусть $z(x_1, \dots, x_n)$ — выпуклая функция и F — выпуклая гиперповерхность, задаваемая уравнением

$$z = z(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть M — любое множество точек на гиперповерхности F . Определим множество точек M^* на гиперплоскости $z = 0$ следующим образом. Точку P с координатами $p_1, p_2, \dots, p_n$ отнесем множеству M^* , если в некоторой точке

(x, z) гиперповерхности, принадлежащей множеству M , найдется опорная гиперплоскость с угловыми коэффициентами $p_1, p_2, \dots, p_n$, т. е.

$$z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n + c.$$

Отображение, при котором множеству M сопоставляется множество M^* , называется *нормальным*. В случае гладкой функции $z(x_1, \dots, x_n)$ и соответственно гладкой гиперповерхности F нормальное отображение задается формулами

$$p_1 = \partial z / \partial x_1, \quad p_2 = \partial z / \partial x_2, \quad \dots, \quad p_n = \partial z / \partial x_n.$$

Нормальное отображение обладает многими свойствами сферического отображения и получается из него проектированием из центра сферы $z^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ сначала на гиперплоскость $z = 1$, а затем параллельным проектированием на координатную гиперплоскость $z = 0$. Очевидно, при такой связи нормального отображения со сферическим образом борелевского множества оно также является борелевским множеством.

Л е м м а 1. Пусть P — выпуклый многогранник в гиперплоскости $z = 0$, B_1, B_2 — его вершины и $A_1, A_2, \dots$ — отмеченные точки внутри многогранника. Тогда существует выпуклая функция $z(x_1, \dots, x_n)$, заданная в P , линейная на каждой грани многогранника P , принимающая в вершинах многогранника B_k заданные значения ψ_k ; гиперповерхность $\tilde{P}$, задаваемая этой функцией, является многогранной, ее вершины проектируются в точки A_k и имеют заданные площади нормального изображения s_k .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\tilde{B}_k$ точку, которая проектируется в вершину B_k и имеет z — координату ψ_k . Построим выпуклую оболочку точек $\tilde{B}_k$. Это будет выпуклый многогранник, может быть, вырождающийся, если точки $\tilde{B}_k$ лежат в одной гиперплоскости. Обозначим через $\tilde{P}$ ту часть поверхности многогранника, которая обращена выпуклостью в сторону $z < 0$. Пусть $\tilde{z}(x_1, \dots, x_n)$ — выпуклая функция, задающая гиперповерхность $\tilde{P}$. Отметим на $\tilde{P}$ точки $\tilde{A}_k$, которые проектируются в точки A_k .

Сместим точку $\tilde{A}_1$ в направлении $z < 0$ и снова построим многогранник $\tilde{P}$, присоединяя точку $\tilde{A}_1$ к системе точек $\tilde{B}_k$ при образовании выпуклой оболочки. Этот

многогранник будет иметь единственную внутреннюю вершину $\tilde{A}_1$. Мы дадим точке $\tilde{A}_1$ такое смещение, чтобы площадь нормального изображения вершины $\tilde{A}_1$ многогранника $\tilde{P}$ была равна s_1 . Теперь сместим точку $\tilde{A}_2$ таким образом, чтобы нормальное изображение вершины $\tilde{A}_2$ стало равно s_2 . При этом нормальное изображение вершины $\tilde{A}_1$ не может возрасти, следовательно, будет не больше s_1 . Сместим далее вершину $\tilde{A}_3$ так, чтобы ее нормальное изображение стало равно s_3 . При этом нормальные изображения вершин $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ могут только уменьшиться и т. д. Перебрав таким образом все вершины, мы возвращаемся снова к вершине A_1 и, опуская ее, увеличиваем площадь ее нормального изображения до s_1 , и т. д.

Функция $z(x)$, задающая многогранник $\tilde{P}$, при описанной его деформации изменяется монотонно (не возрастает), а площади нормальных изображений вершин $\tilde{A}_k$ не превосходят s_k . Покажем, что функция $z(x)$ остается ограниченной при деформации многогранника. Действительно, в противном случае нормальное изображение вершин многогранника $\tilde{P}$ в конце концов покрывало бы любую ограниченную область, а, следовательно, имело бы сколь угодно большую площадь, но она не может быть больше $\sum s_k$.

Так как функция $z(x)$, изменяясь монотонно, остается ограниченной, то многогранники $\tilde{P}$ сходятся. Покажем, что для предельного многогранника площади нормального изображения вершин $\tilde{A}_k$ равны заданным числам s_k . Действительно, допустим, что в какой-нибудь из вершин $\tilde{A}_k$ предельного многогранника площадь нормального изображения меньше s_k (очевидно, она не может быть больше s_k). Тогда у допредельных многогранников, начиная с некоторого момента, будет иметь место то же неравенство. Однако это невозможно, так как каждый раз, когда деформация определяется смещением вершины $\tilde{A}_k$, площадь нормального изображения в ней доводится до значения s_k . Итак, предельный многогранник в вершинах $\tilde{A}_k$ имеет площади нормального изображения s_k .

Функция $z(x)$, задающая допредельный многогранник, очевидно, линейна на каждой грани многогранника P и принимает значение ψ_i в его вершинах B_k . Это свойство сохраняется при переходе к пределу. Поэтому предельная функция $z(x)$, задающая предельный многогранник, ли-

нейна на каждой грани многогранника P и принимает в его вершинах B_k значения ψ_k . Лемма доказана.

2. Понятие обобщенного решения. Задача Дирихле. Пусть $z(x_1, \dots, x_n)$ — выпуклое решение класса C^2 уравнения

$$\|z_{ij}\| = \varphi \quad (1)$$

с положительной правой частью. Пусть F — гиперповерхность, задаваемая уравнением $z = z(x_1, \dots, x_n)$, M — произвольное борелевское множество на гиперповерхности F , $\bar{M}$ — его проекция на гиперплоскость $z = 0$, а M^* — нормальное изображение множества M . Имеем

$$\int_{\bar{M}} \|z_{ij}\| dx_1 \dots dx_n = \int_{\bar{M}} \varphi dx_1 \dots dx_n.$$

С помощью нормального изображения множества M левую часть этого равенства можно записать так:

$$\int_{\bar{M}} \|z_{ij}\| dx_1 \dots dx_n = \int_{M^*} dp_1 \dots dp_n = S(M^*),$$

где $S(M^*)$ — площадь нормального изображения множества M . Таким образом, если $z(x_1, \dots, x_n)$ — выпуклое решение класса C^2 уравнения (1), то для любого борелевского множества M

$$S(M^*) = \int_{\bar{M}} \varphi dx_1 \dots dx_n. \quad (2)$$

Обратно, если для любого борелевского множества M при нормальном отображении с помощью гиперповерхности F класса C^2 выполняется равенство (2), то функция $z(x_1, \dots, x_n)$, задающая гиперповерхность F , является решением уравнения (1). Но уравнение (2) имеет смысл для любой выпуклой функции $z(x_1, \dots, x_n)$ без предположения о двукратной дифференцируемости. Отсюда следует естественное обобщение понятия решения для уравнения (1). Именно, выпуклую функцию $z(x_1, \dots, x_n)$ мы будем называть *обобщенным решением уравнения (1)*, если она удовлетворяет уравнению (2).

Т е о р е м а 1. Для любой строго выпуклой области G , любой положительной непрерывной функции φ , заданной в этой области, и любой непрерывной функции ψ , заданной

на границе области G , существует и притом единственное обобщенное решение задачи Дирихле уравнения (1).

Доказательство. Разобьем область G на малые области g_k и внутри каждой из них отметим точку A_k . Обозначим

$$s_k = \int_{g_k} \varphi dx_1 \dots dx_n.$$

Возьмем достаточно густую сеть точек B_k на границе области G и построим их выпуклую оболочку. Она представляет собой выпуклый многогранник P с вершинами B_k . При достаточной густоте сети точек B_k точки A_k будут строго внутри многогранника P .

Согласно лемме 1 существует многогранник $\tilde{P}$, внутренние вершины которого проектируются на гиперплоскость $z = 0$ в точки A_k и имеют площади нормального изображения s_k . Функция $z(x_1, \dots, x_n)$, задающая многогранник $\tilde{P}$, линейна на гранях многогранника P и равна $\psi(B_k)$ в его вершинах. Построим последовательность многогранников $\tilde{P}$, уменьшая диаметры областей g_k и увеличивая густоту сети точек B_k . Как показано в п. 1, многогранники $\tilde{P}$ ограничены в совокупности, так как общая площадь нормального изображения вершин $\tilde{A}_k$ для каждого многогранника не превосходит $\int \varphi dx_1 \dots dx_n$. Поэтому из последовательности многогранников $\tilde{P}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой выпуклой гиперповерхности F :

$$z = z(x_1, \dots, x_n).$$

Мы утверждаем, что функция $z(x_1, \dots, x_n)$ и дает решение задачи Дирихле, о котором идет речь в теореме 1.

Определим две функции множеств в области G : $\tilde{S}$ и Φ . Функция $\tilde{S}$ равна нулю всюду, кроме точек A_k , в которых она принимает значения s_k . Функция Φ определяется равенством

$$\Phi(M) = \int_M \varphi dx_1 \dots dx_n.$$

Ввиду непрерывности функции φ , когда многогранники $\tilde{P}$ сходятся к гиперповерхности F , функция множеств $\tilde{S}$ слабо сходится к функции Φ . Функция множеств $\tilde{S}$ — это площадь нормального отображения многогранника $\tilde{P}$.

Ввиду отмеченной связи между нормальным и сферическим отображением в п. 1. площадь нормального отображения $\tilde{P}$ слабо сходится к площади нормального отображения гиперповерхности F . Отсюда следует, что площадь нормального отображения F

$$S(M^*) = \int_{\tilde{M}} \varphi dx_1 \dots dx_n.$$

А это значит, что функция $z(x_1, \dots, x_n)$, задающая предельную гиперповерхность F , является обобщенным решением уравнения (1).

Покажем, что полученное обобщенное решение удовлетворяет краевому условию $z = \psi$. Для того чтобы это доказать, достаточно убедиться, что предельная гиперповерхность F однозначно проектируется на замкнутую область $\bar{G}$. Очевидно, неоднозначность проектирования может быть только на границе области G . Пусть A_0 — точка гиперповерхности F , которая проектируется на границу области G , причем для этой точки $z < \psi$ (ввиду выпуклости многогранников $\tilde{P}$ противоположное неравенство $z > \psi$ невозможно). Построим выпуклую оболочку края гиперповерхности F . Ввиду строгой выпуклости области G точка A_0 находится вне выпуклой оболочки. Отсюда следует существование гиперплоскости α :

$$z = \sum_i a_i x_i + c,$$

отделяющей точку A_0 от края гиперповерхности F . Пусть γ — пересечение гиперповерхности F с гиперплоскостью α и V_0 — конус, проектирующий γ из точки A_0 . Нормальное изображение конуса V_0 содержится в нормальном изображении гиперповерхности F , так как для каждой опорной гиперплоскости V_0 существует параллельная опорная гиперплоскость F . Площадь нормального изображения конуса V_0 бесконечна, так как нормальное изображение конуса V_0 является бесконечной выпуклой областью. Возьмем теперь допредельный многогранник $\tilde{P}$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — его пересечение с гиперплоскостью α , $\tilde{A}$ — ближайшая к A_0 его вершина и $\tilde{V}$ — конус, проектирующий $\tilde{\gamma}$ из вершины $\tilde{A}$. При $\tilde{P} \rightarrow F$ конус $\tilde{V} \rightarrow V_0$. Поэтому площадь нормального изображения конуса $\tilde{V}$, а, следовательно, и площадь нормального изображения многогран-

ника $\tilde{P}$ неограниченно растет. Но это невозможно, так как площадь нормального изображения многогранника равна $\int \varphi dx_1 \dots dx_n < \infty$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, предельная гиперповерхность F однозначно проектируется на замкнутую область G , а значит, на границе области G выполняется краевое условие $z = \psi$. Итак, существование обобщенного решения задачи Дирихле доказано. Докажем единственность решения.

Пусть z_1 и z_2 — два различных обобщенных решения уравнения (1), совпадающие на границе области G . Пусть для определенности $z_1(x^0) < z_2(x^0)$ в некоторой точке x^0 области G . Обозначим через G_0 множество тех точек области G , для которых $z_1 < z_2$. Так как функции z_1 и z_2 , как выпуклые функции, почти всюду дифференцируемы, то в G_0 найдется точка x' , в которой обе функции z_1 и z_2 дифференцируемы, причем $dz_1 \neq dz_2$. В противном случае $dz_1 = dz_2$ почти всюду в G_0 , и так как $z_1 = z_2$ на границе G_0 , то $z_1 \equiv z_2$ в G_0 , что невозможно. Сместим гиперповерхность F_1 в направлении $z > 0$ на отрезок $z_2(x')$ — $z_1(x')$. При этом гиперповерхности F_1 и F_2 будут иметь общую точку A' с проекцией x' и различными касательными гиперплоскостями в этой точке. Обозначим через F'_1 связную компоненту множества тех точек, для которых $z_1 < z_2$ с граничной точкой A' . Соответствующая область, с той же проекцией на гиперплоскость $z = 0$, обозначим через F'_2 . Для каждой опорной гиперплоскости F'_2 есть параллельная опорная гиперплоскость F'_1 . Но для опорных гиперплоскостей F'_1 в точках, близких к A' , нет параллельных опорных гиперплоскостей к F'_2 . Так как $\varphi > 0$, то отсюда следует, что площадь нормального изображения F'_1 строго больше площади нормального изображения F'_2 . Но это невозможно, так как обе области F'_1 и F'_2 имеют общую проекцию на гиперплоскость $z = 0$ и, следовательно, должны иметь одну и ту же площадь нормального изображения. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

3. Априорные оценки для регулярных решений.

Т е о р е м а 2. Пусть $u(x)$ — выпуклое регулярное решение уравнения

$$\|z_{ij}\| = \varphi(x) > 0 \quad (1)$$

в области G , удовлетворяющее краевому условию $u = 0$. Тогда для вторых производных решения внутри области G можно указать оценку в зависимости от максимума модуля решения и его производных первого порядка, функции $\varphi(x)$ и ее производных до второго порядка и расстояния точки, в которой дается оценка, от границы области G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функцию

$$w = -ue^{u_\alpha^2/2}u_{\alpha\alpha}, \quad (2)$$

где индексом α указано дифференцирование по фиксированному направлению. Очевидно, функция w достигает максимума в некоторой точке O области G . Примем направление α за координатное, а другие оси выберем так, чтобы в точке O было $u_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и чтобы переход к новым координатам был унимодулярным.

Прологарифмируем равенство (2) и продифференцируем его дважды по x_i . Тогда в точке O , где w достигает максимума, будем иметь

$$\frac{u_{\alpha\alpha i}}{u_{\alpha\alpha}} + u_\alpha u_{\alpha i} + \frac{u_i}{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{u_{\alpha\alpha ii}}{u_{\alpha\alpha}} - \left(\frac{u_{\alpha\alpha i}}{u_{\alpha\alpha}}\right)^2 + u_{\alpha i}^2 + u_\alpha u_{\alpha ii} + \frac{u_{ii}}{u} - \left(\frac{u_i}{u}\right)^2 = \frac{w_{ii}}{w}. \quad (4)$$

Умножая равенство (4) на $u_{\alpha\alpha}/u_{ii}$ и суммируя по i , с помощью равенства (3) получим

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{u_{ii\alpha\alpha}}{u_{ii}} - \sum_i \frac{(u_{\alpha\alpha i})^2}{u_{\alpha\alpha}u_{ii}} + n \frac{u_{\alpha\alpha}}{u} - \left(\frac{u_\alpha}{u}\right)^2 - \\ - \sum_{i \neq \alpha} \frac{(u_{\alpha\alpha i})^2}{u_{\alpha\alpha}u_{ii}} + u_{\alpha\alpha}^2 + u_\alpha u_{\alpha\alpha} \sum_i \frac{u_{\alpha ii}}{u_{ii}} = \sum_i \frac{w_{ii}u_{\alpha\alpha}}{wu_{ii}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь продифференцируем уравнение (1) дважды по x_α в точке O . Последовательно получаем

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha}}{u_{ii}} = \frac{\Phi_\alpha}{\Phi} = (\ln \varphi)_\alpha, \quad (6)$$

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha\alpha}}{u_{ii}} + \sum_{i \neq j} \left(\frac{u_{ii\alpha}u_{jj\alpha}}{u_{ii}u_{jj}} - \frac{u_{ij\alpha}^2}{u_{ii}u_{jj}} \right) = \frac{\Phi_{\alpha\alpha}}{\Phi}. \quad (7)$$

Возведем равенство (6) в квадрат и вычтем его из (7). Тогда получим

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha\alpha}}{u_{ii}} - \sum_{i,j} \frac{(u_{ij\alpha})^2}{u_{ii}u_{jj}} = (\ln \varphi)_{\alpha\alpha}. \quad (8)$$

Вычитая равенства (5) и (8) почленно и замечая, что $w_{ii} \leq 0$ в точке O и

$$- \sum_i \frac{(u_{\alpha\alpha i})^2}{u_{\alpha\alpha}u_{ii}} - \sum_{i \neq \alpha} \frac{(u_{\alpha\alpha i})^2}{u_{\alpha\alpha}u_{ii}} + \sum_{i,j} \frac{(u_{ij\alpha})^2}{u_{ii}u_{jj}} \geq 0,$$

получим

$$\frac{nu_{\alpha\alpha}}{u} - \left(\frac{u_\alpha}{u}\right)^2 + u_{\alpha\alpha}^2 + u_\alpha u_{\alpha\alpha} (\ln \varphi)_\alpha + (\ln \varphi)_{\alpha\alpha} \leq 0. \quad (9)$$

Умножая неравенство (9) на $u^2 e^{u_\alpha^2}$ и вводя w , получим

$$w^2 + Aw + B \leq 0, \quad (10)$$

где A и B допускают оценку в зависимости от указанных в теореме величин. Из неравенства (10) очевидным образом получается оценка для w . Если ее обозначить через w_0 , то всюду в области G

$$u_{\alpha\alpha} \leq \frac{w_0}{|u|}. \quad (11)$$

Так как функция $u(x)$ — выпуклая и обращается в нуль на границе области G , то

$$\frac{|u|}{\delta} \geq \frac{\max |u|}{D},$$

где δ — расстояние точки до границы области G , а D — диаметр области G . Поэтому из (11) получается

$$u_{\alpha\alpha} \leq \frac{w_0 D}{\delta \max |u|}. \quad (12)$$

Так как α — произвольное направление, то оценка (12) завершает доказательство теоремы.

Т е о р е м а 3. Пусть $u(x)$ выпуклое решение уравнения (1) в области G , равное нулю на границе области. Тогда для этого решения и его производных до третьего порядка можно указать оценки в зависимости только от правой

части уравнения φ и ее производных до третьего порядка и расстояния точки до границы области G .

Доказательство. Пусть F — выпуклая гиперповерхность, задаваемая решением $u(x)$. Обозначим через x_0 точку области G , в которой $|u|$ достигает максимума $|u_0|$. Соответствующую точку гиперповерхности F обозначим через A_0 . Пусть ω_0 — шар с центром x_0 в гиперплоскости $z = 0$, содержащий область G , и V_0 — конус с вершиной A_0 и основанием ω_0 . Очевидно, нормальное изображение конуса содержится в нормальном изображении гиперповерхности F . Отсюда

$$\kappa \left(\frac{|u_0|}{R} \right)^n \leq \int_G \varphi dx_1 \dots dx_n,$$

где R — радиус шара ω_0 , а κ — объем единичного шара. Отсюда следует оценка для $|u_0| = \max |u(x)|$.

Оценим первые производные решения в произвольной точке x' области G . Пусть A' — точка гиперповерхности F , которая проектируется в x' . Опишем из точки x' шар ω' в гиперплоскости $z = 0$ радиусом δ , равным расстоянию точки x' от границы области G . Очевидно, наклон касательной гиперплоскости к F в точке A' не больше наклона касательных гиперплоскостей конуса V' с вершиной A' и основанием ω' . Поэтому

$$|u_\alpha| \leq \frac{|u(x')|}{\delta} < \frac{\max |u|}{\delta}.$$

Так как оценка $\max |u|$ получена, то из этого неравенства получаем оценку $|u_\alpha|$.

Чтобы оценить вторые производные, будем рассматривать решение $u(x)$ в подобласти G_ε области G , определяемой условием

$$u < -\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В G_ε по доказанному имеем равномерную оценку решения и его первых производных. По теореме 2 отсюда следует оценка вторых производных $u_{\alpha\beta}$ внутри области G_ε . А так как ε произвольно, то мы получаем оценку всюду внутри области G .

Наконец, чтобы оценить третьи производные, снова рассматриваем решение в области G_ε . Внутри этой области для решения и его производных до второго порядка

оценки равномерны. По теореме 3 § 3 отсюда следует оценка третьих производных внутри области G_ε . И так как ε произвольно, то получается оценка всюду внутри G . Теорема доказана.

4. Регулярность обобщенных решений.

Т е о р е м а 4. *Обобщенное решение $u(x)$ уравнения*

$$\|z_{ij}\| = \varphi(x) > 0 \quad (1)$$

в области G , удовлетворяющее линейному краевому условию

$$u(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0, \quad (2)$$

регулярно, если регулярна правая часть уравнения $\varphi(x)$. Именно, если функция φ принадлежит классу C^k , $k \geq 3$, то решение принадлежит по крайней мере $C^{k+1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Если функция φ — аналитическая, то решение — аналитическое.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что первые производные решения $u_\alpha(x)$ равномерно ограничены в области G . Этого всегда можно добиться, рассматривая решение в области G_ε , определяемой условием

$$u(x) - (a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0) < -\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Далее можно считать, что в области G

$$u - \sum x_\alpha p_\alpha \geq 0,$$

где p_α — угловые коэффициенты опорных гиперплоскостей к гиперповерхности, задаваемой решением. Этого всегда можно добиться переходом к решению $u + c$ при достаточно большом c .

Сместим область G в направлении $z > 0$ в гиперплоскость $z = 1$ и в этом положении обозначим ее G' . Обозначим через Ω единичную гиперсферу $z^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Конус, проектирующий область G' из начала координат, обозначим V' , а его пересечение с гиперсферой Ω обозначим Ω' . Внутри конуса V' определим положительно однородную первой степени выпуклую функцию

$$H'(z, x_1, \dots, x_n) = zu \left(\frac{x_1}{z}, \dots, \frac{x_n}{z} \right).$$

Продолжим функцию H' из конуса V' на все пространство, полагая

$$H(\bar{z}, \bar{x}) = \max_{x \in G} \left| \bar{x}_\alpha p_\alpha + \bar{z} \left(u - \sum x_\alpha p_\alpha \right) \right|.$$

Эта функция симметрична относительно начала координат, выпукла и внутри конуса V' совпадает с функцией $H'(z, x)$. Обозначим через $\bar{F}$ замкнутую выпуклую гиперповерхность с опорной функцией H , а ту ее часть, которая имеет своим сферическим изображением область Ω' , обозначим через F' .

Покажем, что гиперповерхность F' имеет гауссову кривизну в точке с внешней нормалью направления $x_1, x_2, \dots, 1$

$$K = 1/(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1} \varphi.$$

Для этого аппроксимируем функцию $u(x)$ регулярной выпуклой функцией $\tilde{u}(x)$. Построим, далее, опорную функцию $\tilde{H}(z, x)$, гиперповерхность $\tilde{F}$ и область на ней $\tilde{F}'$ подобно тому, как были построены H, F и F' . Обозначим $\|\tilde{u}_{ij}\| = \tilde{\varphi}(x)$. Введем в рассмотрение функции множеств

$$s = \int_M \varphi dx_1 \dots dx_n, \quad \tilde{s} = \int_M \tilde{\varphi} dx_1 \dots dx_n,$$

$$\sigma = \int \varphi (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} dx_1 \dots dx_n,$$

$$\tilde{\sigma} = \int \tilde{\varphi} (1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} dx_1 \dots dx_n.$$

Когда $\tilde{u} \rightarrow u$ и, следовательно, $\tilde{F} \rightarrow F$, то $\tilde{s}$ слабо сходится к s . Отсюда следует слабая сходимости $\tilde{\sigma}$ и σ . Но $\tilde{\sigma}$ — это поверхностная функция гиперповерхности $\tilde{F}'$. Так как гиперповерхность $\tilde{F}'$ сходится к F' , то предел $\tilde{\sigma}$, т. е. функция σ , является поверхностной функцией гиперповерхности F' . Из определения гауссовой кривизны, как предела отношения площади сферического изображения к площади гиперповерхности, заключаем, что гауссова кривизна гиперповерхности F'

$$K = 1/(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1} \varphi.$$

Построим теперь последовательность положительных функций $K_m(\xi)$, класса C^k , на единичной гипертсфере Ω , обладающую следующими свойствами.

1. Функция $K_m(\xi)$ симметрична, т. е. $K_m(\xi) = K_m(-\xi)$.

2. В области Ω' $K_m(\xi)$ совпадает с гауссовой кривизной гиперповерхности F' в точке с внешней нормалью ξ .

3. Функция множеств, определяемая по формуле

$$\sigma_m = \int \frac{d\omega}{K_m(\xi)},$$

слабо сходится к поверхностной функции гиперповерхности F .

Построим замкнутую выпуклую гиперповерхность F_m с гауссовой кривизной K_m (проблема Минковского). Это построение возможно, так как условие

$$\int_{\Omega} \xi \frac{d\omega}{K_m(\xi)} = 0$$

выполняется в силу симметрии функции $K_m(\xi)$. Гиперповерхность F_m принадлежит по крайней мере классу C^4 . При $m \rightarrow \infty$ гиперповерхности F_m сходятся к гиперповерхности F в силу единственности решения проблемы Минковского. Пусть H_m — опорная функция гиперповерхности F . Положим

$$u_m(x_1, \dots, x_n) = H_m(1, x_1, \dots, x_n).$$

Так как гауссова кривизна гиперповерхности F_m в области со сферическим изображением Ω' равна $1/(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n+1}{2}}$ ф, то функция $u_m(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и сходится к обобщенному решению $u(x)$ при $m \rightarrow \infty$. Возможность получения априорных оценок для $u_m(x) - (a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0)$ (теорема 3) гарантирует принадлежность предельной функции $u(x)$ классу $C^{2,1}$. Дальнейшая регулярность $u(x)$ следует из общей теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Любое строго выпуклое решение уравнения (1) с регулярной правой частью ф регулярно. Если функция ф принадлежит классу C^k , $k \geq 3$, то решение принадлежит классу $C^{k+1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Если функция ф — аналитическая, то решение — аналитическое.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — гиперповерхность, задаваемая решением, и A — произвольная точка

на ней. Проведем в точке A опорную гиперплоскость α и сместим ее в направлении $z > 0$ на малое расстояние так, чтобы край гиперповерхности F оставался над гиперплоскостью. Пусть $z = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$ — уравнение смещенной гиперплоскости. Тогда решение $u(x)$ в области G , определяемой неравенством

$$u(x) - \sum a_\alpha x_\alpha - a \leq 0,$$

удовлетворяет условиям теоремы 4 и, следовательно, регулярно в точке A . Теорема доказана.

Т е о р е м а 6. *Полная выпуклая гиперповерхность F , удовлетворяющая уравнению (1), регулярна без предположения строгой выпуклости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего замечаем, что гиперповерхность F имеет точки строгой выпуклости. В самом деле, множество направлений опорных гиперплоскостей, содержащих более одной общей точки с гиперповерхностью, имеет нулевую меру. Поэтому, если гиперповерхность F не имеет точек строгой выпуклости, то ее нормальное изображение имеет нулевую площадь. А у гиперповерхности F она заведомо положительна, так как $\varphi > 0$.

Итак, гиперповерхность F имеет точки строгой выпуклости. Возьмем одну из таких точек A и проведем в ней опорную гиперплоскость α так, чтобы она не имела с F других общих точек, кроме A . Пусть B — произвольная точка гиперповерхности F . Сместим гиперплоскость α в направлении $z > 0$ настолько, чтобы точка B была ниже гиперплоскости α . После этого достаточно применить теорему 4 к решению $u(x)$ в области G , определяемой неравенством

$$u - \left(\sum a_k x_k + a_0 \right) \leq 0.$$

Согласно этой теореме решение $u(x)$ регулярно в области G . Следовательно, гиперповерхность F регулярна в произвольно взятой точке B . Теорема доказана.

5. Пример обобщенного решения, не являющегося регулярным. Вычислим гессиан функции

$$z(x_1, \dots, x_n) = u \left(x_1, \left(\sum_{k=2}^n x_k^2 \right)^{1/2} \right).$$

Положим

$$x_1 = \xi, \quad \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1/2} = \eta.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\|z_{ij}\| = (u_{\xi\xi}u_{\eta\eta} - u_{\xi\eta}^2)(u_{\eta}/\eta)^{n-2}. \quad (1)$$

Возьмем в качестве функции u функцию вида

$$u = (1 + \xi^2)\eta^\alpha.$$

Тогда

$$\|z_{ij}\| = (2\alpha)^{n-1} (1 + \xi^2)^{n-2} \eta^{n(\alpha-2)+2} (\alpha - 1 - (\alpha + 1)\xi^2).$$

Положим теперь $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$. При этом $n(\alpha - 2) + 2 = 0$ и

$$\|z_{ij}\| = (2\alpha)^{n-1} (1 + x_1^2)^{n-2} (\alpha - 1 - (\alpha + 1)x_1^2).$$

Положим

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (2\alpha)^{n-1} (1 + x_1^2)^{n-2} (\alpha - 1 - (\alpha + 1)x_1^2).$$

Покажем, что функция

$$z(x_1, \dots, x_n) = (1 + x_1^2) \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1-\frac{1}{n}}$$

будет обобщенным решением уравнения

$$\|z_{ij}\| = \varphi \quad (2)$$

в шаре $\Omega: x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \varepsilon^2$ достаточно малого радиуса ε . Прежде всего мы замечаем, что функция $z(x)$ является аналитической всюду, кроме оси x_1 . В каждой точке, не лежащей на оси x_1 , $d^2z > 0$. Действительно, угловой минор k -го порядка ($k \geq 2$) матрицы (z_{ij})

$$\Delta_k = (2\alpha)^{k-1} (1 + x_1^2)^{k-2} (\alpha - 1 - (\alpha + 1)x_1^2) > 0,$$

$$\Delta_1 = 2 \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1-\frac{1}{n}} > 0.$$

По теореме Якоби квадратичная форма d^2z — положительно определенная. Следовательно, функция $z(x)$ выпукла в окрестности каждой точки, не лежащей на оси x_1 . Так как функция $z(x)$, кроме того, — гладкая, то она выпуклая в целом.

Ввиду гладкости функции $z(x)$ и регулярности всюду, кроме оси x_1 , площадь нормального отображения гиперповерхности, задаваемой функцией $z(x)$, определяется по формуле

$$s = \int \varphi dx_1 \dots dx_n,$$

и, следовательно, функция $z(x)$ является обобщенным решением уравнения (2) с положительной аналитической правой частью φ . Однако, как указано выше, она не является даже дважды дифференцируемой. Двукратная дифференцируемость нарушается на оси x_1 . Этот пример оправдывает условие строгой выпуклости решения в теореме 5. В данном примере это условие нарушается вдоль оси x_1 .

Построенный пример обобщенного решения уравнения (2) можно оценить еще с другой стороны. Обозначим через ψ значения функции $z(x)$ на границе шара $\Omega: x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \varepsilon^2$. По теореме 1 задача Дирихле для уравнения (2) при граничных значениях ψ имеет обобщенное решение. Однако эта задача не имеет регулярного решения, так как в силу единственности решения оно должно совпадать с $z(x)$. Это оправдывает требование двукратной дифференцируемости граничных значений для регулярной разрешимости задачи Дирихле (п. 6). В построенном примере граничные значения ψ принадлежат только классу $C^{1,1-\frac{2}{n}}$.

В связи с регулярным решением задачи Дирихле, которое будет дано в п. 6, построим еще один пример решения уравнения (2) с положительной постоянной в правой части.

Л е м м а 2. Пусть b, k_0, η_0, A — любые положительные числа, $\xi(x)$ — решение уравнения

$$\xi'' + k_0 \xi^{n-1} = 0 \quad (n > 2)$$

на отрезке $-b \leq x \leq b$, обращенное выпуклостью в сторону $\xi > 0$, равное нулю на концах отрезка. Тогда в

области G_1 , определяемой неравенством

$$\frac{1}{\xi(x_1)} \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1/2} \leq \eta_1 \leq \eta_0,$$

существует выпуклое решение $z_1(x_1, \dots, x_n)$ уравнения

$$\|z_{ij}\| = k_0, \quad (3)$$

которое на границе области G_1 удовлетворяет неравенству

$$z_1(x) \geq A \sum_{k>1} x_k^2,$$

а внутри области принимает отрицательные значения.

Доказательство. Решение $z_1(x)$ мы будем искать в форме

$$z = \xi(x_1) u \left(\frac{1}{\xi(x_1)} \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1/2} \right).$$

Положим

$$\eta = \frac{1}{\xi(x_1)} \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\|z_{ij}\| = -\frac{\xi''}{\xi^{n-1}} u'' (u' \eta - u) \left(\frac{u'}{\eta} \right)^{n-2} = k_0.$$

Так как $\xi'' + k_0 \xi^{n-1} = 0$, то для функции $u(\eta)$ получается уравнение

$$u'' (u' \eta - u) (u' / \eta)^{n-2} = 1. \quad (4)$$

Мы будем рассматривать решения этого уравнения при $\eta \geq 0$ с условиями в нуле $u(0) = \delta < 0$, $u'(0) = 0$, $u''(0) > 0$. Заметим, что u'' сохраняет знак. Поэтому $u(\eta)$ — выпуклая функция.

Пусть a и η_0 — положительные постоянные. Тогда при достаточно малом $|\delta|$ функция $a\eta^2 - u(\eta)$ обращается в нуль при некотором $\eta' \leq \eta_0$. Допустим противное, тогда $u \leq a\eta^2$ при $\eta \leq \eta_0$, как бы ни было мало $|\delta|$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим функцию $u_0(\eta)$, для которой $u(0) = 0$, $u(\eta) \leq a\eta^2$ при $\eta < \eta_0$. Функция u_0 удовлетворяет уравнению (4). Так как выпуклая кривая $u = u_0(\eta)$ расположена между осью η и параболой $u = a\eta^2$, то величина $u'_0 \eta - u_0 \leq A\eta^2$, где A — постоян-

ная, зависящая от a . Отсюда, принимая во внимание $u_0 \leq \leq a\eta^2$, заключаем об ограниченности u'_0/η . Из неравенства $u_0 \leq a\eta^2$ следует существование сколь угодно малых η , для которых $u''_0 \leq 2a$. Для таких значений η при достаточной их малости

$$u''_0 (u'_0\eta - u_0) (u'_0/\eta)^{n-2}$$

сколь угодно мало, что противоречит уравнению (4). Итак, $a\eta_1^2 - u(\eta_1) = 0$ при некотором $\eta' \leq \eta_0$.

Обозначим через G_1 область, задаваемую неравенством

$$\frac{1}{\xi(x_1)} \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1/2} \leq \eta_1.$$

На границе области G_1 функция $z_1(x)$ удовлетворяет неравенству

$$z_1(x) = \xi a \eta_1^2 = \frac{a}{\xi} \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right) \geq \frac{a}{\xi(0)} \sum_{k>1} x_k^2.$$

Так как выбор a ничем не ограничен, то можно считать, что $a/\xi(0) = A$. Итак, построенная функция $z_1(x)$ удовлетворяет уравнению (3) в области G_1 , на границе области G_1

$$z_1(x) \geq A \sum_{k>1} x_k^2.$$

При $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ внутри области G_1 функция z_1 отрицательна. Выпуклость функции $z_1(x)$ устанавливается так же, как в предыдущем примере. Лемма доказана.

6. Регулярное решение задачи Дирихле. Как показано в п. 1 (теорема 1), задача Дирихле для уравнения

$$\|z_{ij}\| = \varphi(x) > 0 \tag{1}$$

с непрерывной положительной правой частью $\varphi(x)$ разрешима в обобщенном смысле для любой строго выпуклой области G при любых непрерывных граничных значениях φ . Если функция φ достаточно регулярна и обобщенное решение строго выпукло, то оно регулярно (теорема 5). К сожалению, условие строгой выпуклости относится к решению, а не к данным задачи. В связи с этим представляет интерес следующая теорема.

Т е о р е м а 7. *Задача Дирихле для уравнения (1) с регулярной правой частью $\varphi(x)$ в строго выпуклой области G всегда имеет регулярное решение, если граница области G и функция ψ , заданная в качестве граничных значений решения, принадлежат классу C^2 . Решение принадлежит классу $C^{k+1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, если функция φ принадлежит классу C^k ($k \geq 3$). Решение — аналитическое, если функция φ — аналитическая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z(x)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области G с граничными значениями ψ . Обозначим через F выпуклую гиперповерхность, задаваемую решением $z(x)$. Если гиперповерхность F — строго выпуклая, то решение $z(x)$ является регулярным по теореме 5. Допустим, что гиперповерхность F — не строго выпуклая. Тогда у нее существует опорная гиперплоскость σ , у которой общая часть с F есть выпуклое множество M , содержащее более одной точки. Мы утверждаем, что каждая точка строгой выпуклости множества M лежит на границе F .

Пусть A — точка строгой выпуклости M , не лежащая на границе F . Проведем через A опорную плоскость α к M , имеющую с M только одну общую точку (A). Плоскость α разбивает σ на две части. Пусть σ_1 — та из них, которая не содержит M . Пусть F_1 — часть гиперповерхности F , которая проектируется в σ_1 . Гиперповерхность F_1 расположена над σ_1 . Сместим плоскость α на малое расстояние в сторону M в положение α' . Повернем гиперплоскость σ около α' на малый угол в положение σ' так, чтобы точка A была ниже σ' . Пусть F_A — та компонента разбиения F гиперплоскостью σ' , которой принадлежит точка A . При достаточной близости α' к α и σ' к σ граница F_A отделена от границы F . По теореме 4 гиперповерхность F_A регулярна в окрестности точки A . Но тогда точка A является точкой строгой выпуклости F , и мы приходим к противоречию (M состоит из одной точки A). Таким образом, точки строгой выпуклости M лежат на границе F . Следовательно, на F имеется прямолинейный отрезок g с концами на границе F .

Пусть $\sigma: z = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$ — опорная гиперплоскость F вдоль отрезка g . Функция $\bar{z}(x) = z(x) - (a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0)$ также удовлетворяет уравнению (1). Граничные значения $\bar{z}(x)$ также принадлежат C^2 . Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейших

рассмотрениях мы будем считать, что отрезок g расположен на оси x_1 , со серединой в начале координат, и координатная гиперплоскость $z = 0$ является опорной для гиперповерхности F , задаваемой решением.

Пусть B_1 и B_2 — концы отрезка g . Граница области G в окрестности точки B_1 задается уравнением вида $x_1 = \chi_1(x_2, \dots, x_n)$. Аналогичным уравнением $x_1 = \chi_2(x_2, \dots, x_n)$ задается граница G в окрестности точки B_2 . Граница гиперповерхности F в окрестности точки B_1 задается двумя уравнениями

$$x_1 = \chi_1(x_2, \dots, x_n), \quad z = \psi_1(x_2, \dots, x_n).$$

Аналогично задается граница F в окрестности точки B_2

$$x_1 = \chi_2(x_2, \dots, x_n), \quad z = \psi_2(x_2, \dots, x_n).$$

Так как координатная гиперплоскость $z = 0$ является опорной для F , то в точках B_1 и B_2 имеем $\psi_1 = 0$, $d\psi_1 = 0$ и соответственно $\psi_2 = 0$, $d\psi_2 = 0$. Так как функция ψ , задающая граничные значения решения, по условию теоремы принадлежит классу C^2 , то в окрестности точек B_1 и B_2 , т. е. при достаточно малых значениях $\sum_{k>1} (x_k)^2$, имеют место неравенства

$$\psi_1 < A \sum_{k>1} x_k^2, \quad \psi_2 < A \sum_{k>1} x_k^2,$$

где A — некоторое положительное число. Обозначим через Φ_1 гиперповерхность, задаваемую уравнением

$$z = A \sum_{k>1} x_k^2.$$

Построим выпуклую оболочку границы F и обозначим через Φ ту ее часть, которая обращена выпуклостью в сторону $z < 0$. Пусть $\zeta(x)$ — выпуклая функция, задающая Φ . По свойству расположения выпуклой оболочки

$$z(x) \leq \zeta(x),$$

где $z(x)$ — функция, задающая F . Гиперповерхность Φ_1 в окрестности отрезка g расположена над выпуклой оболочкой Φ . Поэтому в некоторой окрестности отрезка g

имеет место неравенство

$$z(x) \leq \zeta(x) \leq A \sum_{k>1} x_k^2.$$

Обратимся теперь к решению $z_1(x)$ уравнения

$$\|z_{ij}\| = k_0 < \varphi(x),$$

о котором идет речь в лемме 2 (п. 5). На границе области G_1 , определяемой неравенством

$$\frac{1}{\xi(x_1)} \left(\sum_{k>1} x_k^2 \right)^{1/2} \leq \eta_1,$$

это решение

$$z_1(x) \geq A \sum_{k>1} x_{2k}.$$

Следовательно, на границе области G_1

$$z(x) \leq z_1(x).$$

Рассмотрим теперь выпуклые гиперповерхности F' и F'_1 , задаваемые функциями $z(x)$ и $z_1(x)$ соответственно в области G_1 . Функции $z(x)$ и $z_1(x)$ обладают следующими свойствами. В начале координат $z_1 < z$, на границе области G_1 $z_1 \geq z$. Обозначим через G'_1 связную компоненту множества тех точек области G_1 , содержащую начало координат, в которых $z_1 < z$. Множество G'_1 есть область, на ее границе $z_1 = z$. Обозначим через F'' и F''_1 части гиперповерхностей F' и F'_1 , которые проектируются в область G'_1 . Так как $z = z_1$ на границе области G'_1 , а внутри области $z_1 < z$, то нормальное изображение гиперповерхности F'' содержится в нормальном изображении F''_1 . Следовательно,

$$\int_{G'_1} \varphi(x) dx_1 \dots dx_n \leq \int_{G'_1} k_0 dx_1 \dots dx_n.$$

Но это невозможно, так как $\varphi > k_0$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

§ 6. О НЕСОБСТВЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ АФФИННЫХ ГИПЕРСФЕРАХ

Несобственной аффинной гиперсферой называется полная гиперповерхность в $n + 1$ -мерном евклидовом пространстве, которая при подходящем выборе декартовой системы координат $x_1, \dots, x_n, z$ задается уравнением вида $z = z(x_1, \dots, x_n)$, где $z(x)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\|z_{ij}\| = \text{const} > 0.$$

Основным результатом настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Выпуклая несобственная аффинная гиперсфера является эллиптическим параболоидом.*

Эта теорема при $n = 2$ доказана К. Ёргенсом [9], а при $n = 3, 4$ — Е. Калаби [10]. В данной работе теорема доказывается при любом n .

1. О расположении центра тяжести выпуклого тела. В этом пункте мы рассмотрим некоторые свойства расположения центра тяжести выпуклых тел в n -мерном евклидовом пространстве. Эти свойства хорошо известны. Мы приводим их для полноты изложения вопроса.

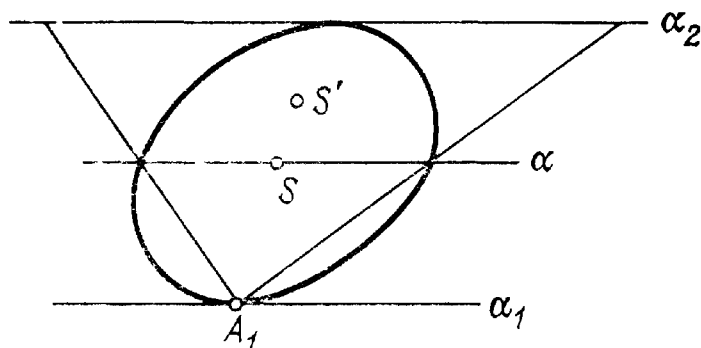


Рис. 1.

Пусть S — центр тяжести выпуклого тела и h_1, h_2 — расстояния S от двух параллельных опорных гиперплоскостей. Тогда

$$\frac{1}{n} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq n.$$

Действительно, пусть α_1 и α_2 — параллельные опорные гиперплоскости и α — параллельная им гиперплоскость, проходящая через центр тяжести S (рис. 1). Построим конус с вершиной A_1 , проектирующий сечение тела ги-

перпендикулярно к гиперплоскости α . При переходе от тела к конусу центр тяжести смещается к гиперплоскости α_2 . Для центра тяжести S' конуса $h'_1/h'_2 = n$. Поэтому для данного тела $h_1/h_2 \leq n$. Аналогично доказывается, что $h_2/h_1 \leq n$, т. е. $h_1/h_2 \geq 1/n$. Утверждение доказано.

Пусть T — выпуклое тело с центром тяжести S и E — эллипсоид минимального объема с центром S , содержащий

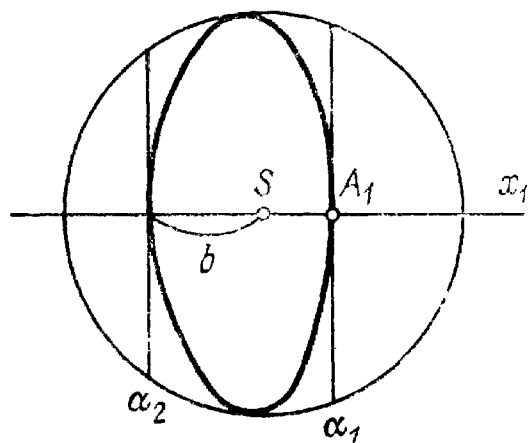


Рис. 2.

тело. Тогда гомотетичный E относительно центра S эллипсоид с коэффициентом гомотетии $1/n^{3/2}$ содержится внутри тела T . Не ограничивая общности, можно считать что эллипсоид E является шаром. Общий случай сводится к этому частному подходящим аффинным преобразованием. Пусть r — радиус шара E . Допустим, утверждение неверно. Тогда ближайшая к S точка A_1 границы тела

находится на расстоянии, меньшем $r/n^{3/2}$. Проведем через точку A_1 опорную гиперплоскость α_1 тела и пусть α_2 — параллельная опорная гиперплоскость (рис. 2). Гиперплоскость α_2 находится на расстоянии $b < r/\sqrt{n}$ от S .

Введем прямоугольные декартовы координаты x_i , приняв точку S за начало координат, а направление оси x_1 перпендикулярно к гиперплоскостям α_1 и α_2 . Так как тело T содержится внутри шара E между гиперплоскостями α_1 и α_2 , то для каждой точки x тела

$$|x_1| < b, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2.$$

Рассмотрим эллипсоид E' :

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=2}^n x_k^2 = 1,$$

где

$$\alpha = b\sqrt{n}, \quad \beta = \left(\frac{n(r^2 - b^2)}{n-1} \right)^{1/2}.$$

Утверждается, что этот эллипсоид также содержит тело T и имеет объем, меньший объема шара E . Действительно,

Наше утверждение о существовании центрального сечения эквивалентно утверждению о разрешимости системы уравнений

$$\left. \begin{array}{l} f_1(p_1, p_2, \dots, p_n, h) = 0, \\ f_2(p_1, p_2, \dots, p_n, h) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(p_1, p_2, \dots, p_n, h) = 0 \end{array} \right\} \quad (*)$$

при любом h .

Обозначим через E множество тех точек S полуоси $z \geq 0$, через которые можно провести центральное сечение. Точка O , очевидно, принадлежит E . Поэтому E не пусто. Покажем, что множество E открыто и замкнуто. Так как оно не пусто, отсюда будет следовать, что E содержит все точки полуоси $z \geq 0$.

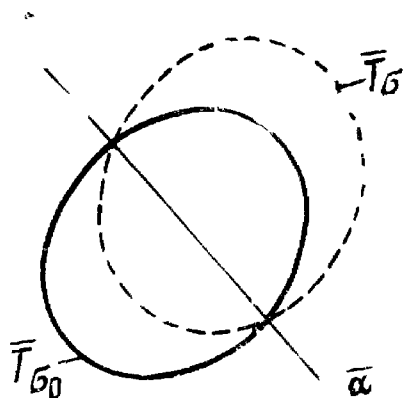


Рис. 3.

Пусть система (*) разрешима при $h = h_0$. Покажем, что она разрешима для всех h , достаточно близких к h_0 . Проведем через точку $S_0(h_0)$ центральное сечение σ_0 . Проведем еще через точку S_0 любую гиперплоскость σ , близкую к σ_0 . Гиперплоскости σ и σ_0 пересекаются по некоторой $n - 2$ -мерной плоскости α . Пусть $\bar{\alpha}$ — ее про-

екция на гиперплоскость $z = 0$. Плоскость $\bar{\alpha}$ разбивает тело $\bar{T}_{\sigma_0}$ (рис. 3) на части A_1^0 и A_2^0 , а тело $\bar{T}_{\sigma}$ — соответственно на части A_1 и A_2 . Так как гиперповерхность F — выпуклая, то либо $A_1^0 \subset A_1$, а $A_2^0 \supset A_2$, либо $A_1^0 \supset A_1$, а $A_2^0 \subset A_2$. В любом случае переход от сечения σ_0 к σ дает смещение центра тяжести O . Более того, нетрудно видеть, что если dp — изменение угловых коэффициентов при переходе от σ_0 к σ , а dx — смещение центра тяжести, то $|dx| \geq c |dp|$, где c — положительная постоянная. Так как $|dx| \geq c |dp|$, то определитель Якоби для системы (*) отличен от нуля для значений p и h , отвечающих гиперплоскости σ_0 . Отсюда, как известно, следует разрешимость системы (*) для значений h , близких к h_0 . Таким образом, если точка S_0 принадлежит множеству E , то близкие к ней точки S тоже принадлежат E , т. е. множество E открыто.

Докажем теперь, что множество E замкнуто.

Пусть S_0 — граничная точка для множества E . Возьмем последовательность точек S_k из множества E , сходящуюся к точке S_0 . Пусть σ_k — центральное сечение, проходящее через точку S_k . Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность гиперплоскостей σ_k сходится к некоторой гиперплоскости σ_0 . Требуется доказать, что сечение гиперплоскостью σ_0 является центральным. Если тело T_{σ_0} конечно, то это свойство очевидно. Если же тело T_{σ_0} бесконечно, то по первому свойству центра тяжести (п. 1) в применении к телам T_{σ_k} оно должно содержать целую прямую. Но в этом случае, как известно, его поверхность должна быть цилиндром. А это невозможно, так как сечение строго выпуклой гиперповерхности F гиперплоскостью σ_0 является строго выпуклым. Таким образом, тело T_{σ_0} конечно, а, следовательно, сечение гиперплоскостью σ_0 — центральное. Итак, доказано, что предельные точки множества E принадлежат этому множеству, т. е. множество E — замкнутое. Утверждение доказано полностью.

3. Некоторые соотношения размеров для аффинной гиперсферы. Пусть выпуклая аффинная гиперсфера F удовлетворяет уравнению

$$\|z_{ij}\| = 1. \quad (1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат O принадлежит гиперсфере. Сохраняя обозначения п. 2, проведем через точку $S(h)$ положительной полуоси z центральное сечение тела T , ограниченного гиперповерхностью F . Пересечение гиперплоскости σ и тела T обозначим через T_σ , а его проекцию на гиперплоскость $z = 0$ обозначим через $\bar{T}_\sigma$. Построим эллипсоид E наименьшего объема с центром в точке O , содержащий тело $\bar{T}_\sigma$. Выполним теперь эквиаффинное преобразование гиперплоскости $z = 0$, чтобы построенный эллипсоид перешел в шар. Пусть r — радиус этого шара. Мы утверждаем, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , зависящие только от n , такие, что

$$c_1 \leq \frac{r^2}{h} \leq c_2.$$

Продолжим эквиаффинное преобразование гиперплоскости $z = 0$ на все пространство, полагая $z' = z$. Это

преобразование переводит гиперповерхность F в гиперповерхность F' , также удовлетворяющую уравнению (1). Пусть

$$z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

— уравнение касательной гиперплоскости F' в точке O . Подвергаем гиперповерхность F' аффинному преобразованию

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_n = x_n, \\ z' &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n. \end{aligned}$$

При этом получим гиперповерхность F'' . Гиперповерхность F'' тоже удовлетворяет уравнению (1). Сечение ее гиперплоскостью $z = h$ является центральным, а минимальный эллипсоид, содержащий его проекцию, есть шар. Чтобы не вводить новых обозначений, будем предполагать, что исходная гиперповерхность F уже обладает указанными свойствами. Именно, гиперплоскость σ центрального сечения, проходящего через точку $S(h)$, задается уравнением $z = h$, а эллипсоид минимального объема, содержащий тело $\bar{T}_\sigma$, есть шар.

Пусть M — любое борелевское множество точек на гиперповерхности $F: z = z(x)$. Поставим в соответствие каждой точке A из M точку гиперплоскости $z = 0$ с координатами $p_1 = \partial z / \partial x_1, \dots, p_n = \partial z / \partial x_n$. Это отображение называется *нормальным*. Пусть $\bar{M}$ — проекция множества M на гиперплоскость $z = 0$. Тогда площади множеств $\bar{M}$ и $\bar{M}$ равны. Действительно, в силу уравнения (1)

$$\int_{\bar{M}} dp_1 dp_2 \dots dp_n = \int_{\bar{M}} \|z_{ij}\| dx_1 \dots dx_n = \int_{\bar{M}} dx_1 \dots dx_n.$$

Понятие нормального отображения можно определить для общей выпуклой гиперповерхности (не гладкой), при этом величины p_k будут угловыми коэффициентами опорных гиперплоскостей (см. § 5, п. 1).

Чтобы не вводить новых обозначений, будем понимать под гиперповерхностью F ту ее часть, которая расположена ниже секущей гиперплоскости $\sigma: z = h$. Построим конус V с вершиной O , проектирующий область T_σ (рис. 4). Нормальное изображение гиперповерхности F покрывает нормальное изображение конуса V , так как для каждой опорной гиперплоскости конуса существует

параллельная касательная гиперплоскость F . Нормальное изображение конуса V покрывает нормальное изображение конуса с вершиной O , проектирующего шар наименьшего радиуса с центром S , содержащий тело T_σ . Отсюда следует, что площадь нормального изображения гиперповерхности F не меньше $(h/r)^n \kappa_n$, где κ_n — объем n -мерного шара единичного радиуса. Что касается площади проекции гиперповерхности F на гиперплоскость $z = 0$, то она равна площади области T_σ , а, следовательно, не больше $r^n \kappa_n$. Так как площадь нормального изображения гиперповерхности F равна площади ее проекции на гиперплоскость $z = 0$, то получается неравенство

$$\frac{(h/r)^n \kappa_n}{r^n \kappa_n} = (h/r^2)^n \leq 1,$$

т. е. $h/r^2 \leq 1$.

Оценим теперь отношение h/r^2 снизу. Гиперповерхность, расположенная ниже гиперплоскости σ , имеет

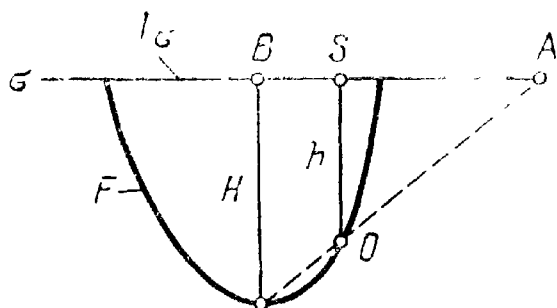


Рис. 5.

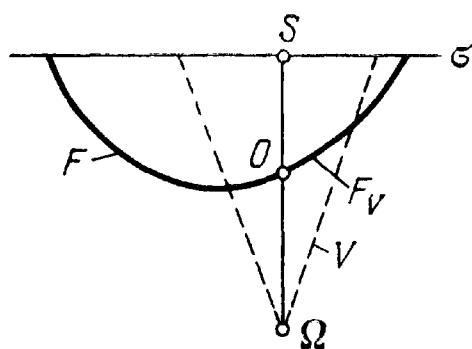


Рис. 6.

форму чаши. Оценим ее высоту H (рис. 5). Точка A находится вне тела T_σ , следовательно, на расстоянии, не меньшем $r/n^{3/2}$, от точки S (п. 1). Точка B находится внутри тела T_σ , следовательно, на расстоянии, не большем r , от точки S . Отсюда следует

$$H = h \frac{AB}{AS} = h \left(1 + \frac{BS}{AS} \right) \leq h (1 + n^{3/2}).$$

Возьмем на отрицательной полуоси z точку Ω на расстоянии $2H$ от точки S (рис. 6). Построим конус V с вершиной Ω , проектирующий шар радиуса $r/n^{3/2}$ с центром S . Обозначим через F_V ту часть гиперповерхности F , которая расположена внутри конуса V . Площадь нормального изображения гиперповерхности F_V не больше площади нормального изображения конуса V , т. е. не больше $\kappa_n (2Hn^{3/2}/r)^n$. Ее проекция на гиперплоскость $z = 0$ покрывает шар радиуса $r/2n^{3/2}$ с центром O . Следовательно, площадь проекции не меньше $\kappa_n (r/2n^{3/2})^n$. Отсюда получаем неравенство

$$\frac{\kappa_n (2Hn^{3/2}/r)^n}{\kappa_n (r/2n^{3/2})^n} = \left(\frac{4Hn^3}{r^2} \right)^n \geq 1,$$

или, принимая во внимание, что $H \leq h(1 + n^{3/2})$,

$$\frac{h}{r^2} \geq \frac{1}{4n^3 (1 + n^{3/2})}.$$

Утверждение доказано полностью.

4. Априорные оценки для аффинных гиперсфер. Пусть $z(x)$ — выпуклое решение уравнения

$$\|z_{ij}\| = 1 \quad (1)$$

в выпуклой области G диаметра $D \leq 2$. Пусть это решение на границе области G удовлетворяет краевому условию:

$z = 1$. Тогда для первых производных z всюду в области G , где $z \leq 1/2$, имеет место оценка

$$|z_\alpha| \leq c_1,$$

где c_1 — постоянная, зависящая только от n .

Пусть $\bar{A}'$ — произвольная точка области G , A и A' — точки на гиперповерхности $F: z = z(x)$ и на гипер-

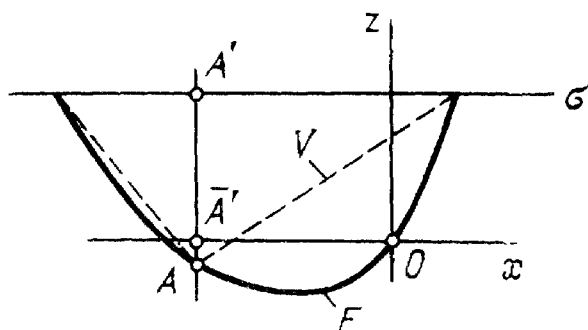


Рис. 7.

плоскости $\sigma: z = 1$, проектирующиеся в точку $\bar{A}'$ (рис. 7). Обозначим через h' длину отрезка AA' . Построим конус V с вершиной A , проектирующий край гиперповерхности F . Площадь нормального изображения конуса V не больше площади нормального изображения гиперповерхности

F , следовательно, не больше площади области G . А площадь области G не больше $\kappa_n D^n$.

Нормальное изображение конуса V является выпуклой областью. Ее граница задается уравнением

$$x = \frac{\xi h'}{H(\xi)},$$

где $H(\xi)$ — расстояние от точки $\bar{A}'$ до опорной плоскости области G с внешней нормалью ξ . Если расстояние точки $\bar{A}'$ от границы области G равно ρ' , то нормальному изображению конуса V принадлежит точка на расстоянии h'/ρ' от начала координат O . С другой стороны, нормальное изображение конуса V покрывает шар радиуса h'/D . Так как нормальное изображение конуса является выпуклой областью, то ему принадлежит конус вращения с высотой h'/ρ' и радиусом основания h'/D . Отсюда следует, что площадь (объем) нормального изображения конуса V не меньше

$$\frac{1}{n} \frac{h'}{\rho'} \left(\frac{h'}{D} \right)^{n-1} \kappa_{n-1},$$

где κ_{n-1} — объем $n-1$ -мерного единичного шара. Вспоминая, что площадь области G не больше $\kappa_n D^n$, получаем неравенство

$$\frac{1}{n} \frac{h'}{\rho'} \left(\frac{h'}{D} \right)^{n-1} \kappa_{n-1} \leq \kappa_n D^n.$$

Отсюда, замечая, что $|z_\alpha|_A \leq h'/\rho'$, получаем при $z = 1/2$

$$|z_\alpha| \leq \frac{h'}{\rho'} \leq \frac{n\kappa_n}{\kappa_{n-1}} D^{2n-1} 2^{n-1} \leq \frac{n\kappa_n}{\kappa_{n-1}} 2^{3n-2}.$$

Утверждение доказано.

Покажем теперь, что в области G всюду, где $z \leq 1/4$, решение $z(x)$ уравнения (1) допускает абсолютную оценку

$$|z_{\alpha\beta}| \leq c_2,$$

где c_2 — постоянная, зависящая только от n .

Действительно, пусть G_1 — подобласть области G , где $z \leq 1/2$, а G_2 — подобласть области G_1 , где $z \leq 1/4$. По доказанному $|z_\alpha| \leq c_1$ в области G_1 , где c_1 — постоянная, зависящая только от n . Пусть x — произвольная точка области G_2 . Оценим расстояние $\rho(x)$ этой точки

от границы области G_1 . Так как первые производные $z(x)$ в области G_1 не превосходят c_1 , а в точке x $z(x) \leq 1/4$, в то время как на границе области G_1 $z = 1/2$, то $\rho(x) \geq 1/4c_1$. Таким образом, расстояния точек области G_2 от границы области G_1 допускают зависящую только от n положительную оценку снизу.

Согласно теореме 2 § 5 вторые производные решения уравнения (1) в области G_1 допускают оценку в зависимости только от максимума модуля первых производных и расстояния до границы области G_1 . Так как в области G_2 расстояния точек от границы области G_1 равномерно ограничены снизу положительным числом $(1/4c_1)$, то оценка вторых производных при $z \leq 1/4$ оказывается зависящей только от c_1 , т. е. в конечном счете только от n . Утверждение доказано.

5. Доказательство основной теоремы для несобственных выпуклых аффинных гиперсфер. Докажем, что несобственные выпуклые аффинные гиперсферы являются эллиптическими параболоидами. Пусть F — несобственная выпуклая аффинная гиперсфера, задаваемая выпуклой функцией $z(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\|z_{ij}\| = 1. \quad (1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат O принадлежит F . Возьмем на полуоси $z > 0$ точку S на расстоянии h от начала координат O и проведем через нее центральное сечение σ (п. 2). Пересечение тела T , ограниченного гиперсферой F , с гиперплоскостью σ обозначим через T_σ , а его проекцию на гиперплоскость $z = 0$ — через $\bar{T}_\sigma$. Отметим на полуоси $z > 0$ точку S' на расстоянии $h/4$ от точки O и проведем через нее гиперплоскость σ' , параллельную σ . Пересечение σ' с T обозначим через $T_{\sigma'}$, а его проекцию на гиперплоскость $z = 0$ — через $\bar{T}_{\sigma'}$. Тело $\bar{T}_{\sigma'}$ содержит тело $\bar{T}_{\sigma/4}$, получаемое из $\bar{T}_{\sigma'}$ гомотетичным преобразованием относительно центра O с коэффициентом гомотетии $1/4$. Пусть

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n + h$$

— уравнение гиперплоскости σ . Подвергнем гиперсферу F аффинному преобразованию

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_n = x_n, \\ z' &= z - p_1x_1 - \dots - p_nx_n. \end{aligned}$$

При этом гиперплоскость σ перейдет в гиперплоскость $z = h$.

Построим эллипсоид минимального объема с центром в точке O , содержащий тело $\bar{T}_\sigma$. Подвергнем гиперплоскость $z = 0$ эквиаффинному преобразованию, при котором эллипсоид E переходит в шар. Пусть r — радиус этого шара. Продолжим эквиаффинное преобразование на все пространство, полагая $z' = z$. При подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат построенное эквиаффинное преобразование задается формулами

$$z' = z, \quad x'_1 = \lambda_1 x_1, \quad x'_2 = \lambda_2 x_2, \quad \dots, \quad x'_n = \lambda_n x_n.$$

Выполним, наконец, аффинное преобразование, задаваемое формулами

$$z' = \frac{z}{h}, \quad x'_1 = \frac{x_1}{r}, \\ x'_2 = \frac{x_2}{r}, \dots, \quad x'_n = \frac{x_n}{r}.$$

Пусть $\bar{F}$ — аффинная гиперсфера, полученная указанной последовательностью трех аффинных преобразований из F . Пусть $\bar{z}(x)$ — задающая ее функция. Функция $\bar{z}(x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\|\bar{z}_{ij}\| = \text{const} > 0.$$

Так как $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$, а отношение h/r^2 ограничено абсолютными постоянными (п. 2), то постоянная в уравнении для $\bar{z}$ тоже ограничена абсолютными постоянными (зависящими только от n). Не ограничивая общности, можно считать ее равной единице.

Вторые производные для гиперповерхностей F и $\bar{F}$ в соответствующих точках связаны соотношениями

$$\bar{z}_{\alpha\alpha} = \left(\frac{1}{\lambda_\alpha}\right)^2 \frac{r^2}{h} z_{\alpha\alpha}. \quad (*)$$

При аффинном преобразовании F в $\bar{F}$ точка O переходит в себя. Поэтому

$$\bar{z}_{\alpha\alpha}|_O = \left(\frac{1}{\lambda_\alpha}\right)^2 \frac{r^2}{h} z_{\alpha\alpha}|_O.$$

Отсюда, принимая во внимание оценки для $\bar{z}_{\alpha\alpha}$, полученные в п. 4, заключаем, что коэффициенты λ_k эквиаффинного преобразования допускают абсолютную оценку снизу. После этого из условия $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$ получаем для них абсолютную оценку сверху.

При аффинном преобразовании, которое переводит F в $\bar{F}$, область $\bar{T}_{\sigma'}$ переходит в некоторую область G' . В этой области $z \leq 1/4$, и, следовательно, производные $\bar{z}_{\alpha\alpha}$ допускают абсолютную оценку (п. 4). Теперь из соотношения (*), принимая во внимание абсолютные оценки для λ_α и r^2/h , заключаем о существовании абсолютных оценок для $z_{\alpha\alpha}$ в области $\bar{T}_{\sigma'}$.

При $h \rightarrow \infty$ радиус $r \rightarrow \infty$. Так как для λ_α имеют место абсолютные оценки, не зависящие от h , то область $\bar{T}_\sigma$ при $h \rightarrow \infty$ распространяется на всю гиперплоскость $z = 0$. Отсюда мы делаем важный вывод. Именно, гиперповерхность F проектируется на всю гиперплоскость $z = 0$. Принимая во внимание соотношение между областями $\bar{T}_\sigma$ и $\bar{T}$ ($\bar{T}_{\sigma/4} \subset \bar{T}_{\sigma'}$), заключаем, что и область $T_{\sigma'}$ при $h \rightarrow \infty$ распространяется на всю гиперплоскость $z = 0$. Так как в области $T_{\sigma'}$ для $z_{\alpha\alpha}$ имеет место абсолютная оценка, не зависящая от h , то такая оценка имеет место на всей гиперплоскости $z = 0$

$$|z_{\alpha\alpha}| \leq c.$$

Принимая во внимание уравнение (1), для функции $z(x)$ получаем оценку снизу

$$z_{\alpha\alpha} \geq \frac{1}{c^{n-1}}.$$

Рассмотрим теперь риманову метрику, задаваемую метрическим тензором $g_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}$. Эта метрика — полная, так как

$$\sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \geq \frac{1}{c^{n-1}} \sum_{\alpha} dx_\alpha^2.$$

Из полноты этой метрики, как показано в работе Е. Калаби [10], следует, что решение $z(x)$ уравнения (1) есть многочлен второй степени, т. е. гиперсфера F есть эллиптический параболоид. Теорема доказана.

В заключение заметим следующее. Формулировка доказанной теоремы не содержит каких-либо условий о степени регулярности функции $z(x)$, задающей гиперсферу, кроме естественного требования двукратной дифференцируемости. Вместе с тем данное доказательство предполагает четырехкратную дифференцируемость в п. 4, а теорема Е. Калаби, которой завершается доказательство, требует пятикратной дифференцируемости. Отсутствие требований регулярности в формулировке теоремы не случайно. Дело в том, что двукратная дифференцируемость решения уравнения (1) влечет за собой строгую выпуклость. А по теореме 5 § 5 такое решение будет аналитическим.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. M i n k o w s k i, Volumen und Oberfläche, Math. Ann. 57 (1903).
- [2] T. B o n n e s e n und W. F e n c h e l, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math., 1934.
- [3] А. Д. А л е к с а н д р о в, К теории смешанных объемов выпуклых тел, Матем. сб. 2: 5, 6 (1937); 3: 1, 2 (1938).
- [4] H. L e v y, On differential geometry on the large. I, Trans. Amer. Math. Soc. 43: 2 (1938).
- [5] C. M i r a n d a, Su un problema di Minkowski, Rend. Sem. Matem. di Roma 3 (1939).
- [6] L. N i r e n b e r g, The Weyl and Mincowski problems in differential geometry in the large, Comm. Pure and Appl. Math. 6 (1953).
- [7] D. H i l b e r t, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig u. Berlin, 1915.
- [8] А. В. П о г о р е л о в, Об уравнениях Монжа—Ампера эллиптического типа, Изд. Харьковск. ун-та, 1960.
- [9] K. I ö r g e n s, Über die Lösungen der Differentialgleichung $nt - s^2 = 1$, Math. Ann. 127 (1954).
- [10] E. C a l a b i, Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of theorem by K. Iörgens, Michigan Math. J. 5: 2 (1958).
- [11] К. М и р а н д а, Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.
- [12] H. O. C o r d e s, Über die erste Randwertaufgabe bei quasi-linearen Differentialgleichungen zweier Ordnung in mehr als zwei Variablen, Math. Ann. 131 (1956).
- [13] А. В. П о г о р е л о в, Априорная оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в зависимости от ее гауссовой кривизны, ДАН 181: 4 (1968).

- [14] А. В. П о г о р е л о в, Регулярное решение n -мерной проблемы Минковского, ДАН 199: 4 (1971).
- [15] А. В. П о г о р е л о в, Априорная оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в зависимости от их средних значений, ДАН 186: 3 (1969).
- [16] А. В. П о г о р е л о в, Существование замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной функцией главных радиусов кривизны, ДАН 193: 3 (1971).
- [17] А. В. П о г о р е л о в, О регулярности обобщенных решений уравнения $\det \| \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j \| = \varphi(x_1, \dots, x_n) > 0$, ДАН 200: 3 (1971).
- [18] А. В. П о г о р е л о в, Задача Дирихле для многомерного аналога уравнения Монжа—Ампера, ДАН 201: 4 (1971).
- [19] А. В. П о г о р е л о в, Несобственные выпуклые аффинные гиперсферы, ДАН 202: 5 (1972).

Алексей Васильевич Погорелов
МНОГОМЕРНАЯ ПРОБЛЕМА МИНКОВСКОГО

М., 1975 г., 96 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Ланко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Бутусова, М. Л. Медведская*

Сдано в набор 29/X 1974 г. Подписано к печати
13/II 1975 г. Бумага № 1 84×108¹/₁₂ Физ. печ. л. 3.

Усл. печ. л. 5,04. Уч-изд. л. 4,32

Тираж 6000 экз. Т-02062. Цена книги 28 коп.

Зак. № 1330

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука»,
Москва, Шубинский пер., д. 10